Karlsruher Institut für Technologie

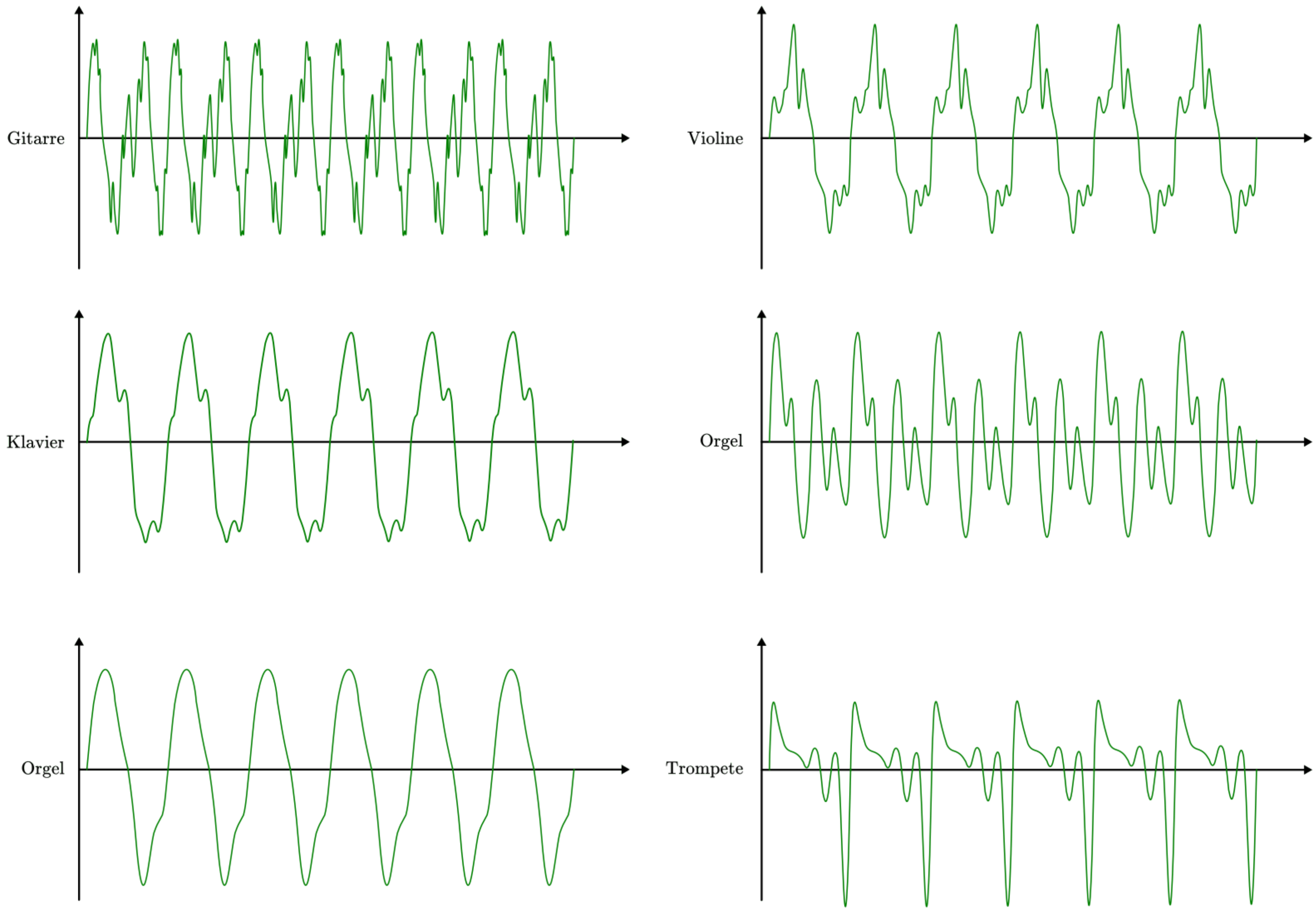
Vorlesung 2.1

Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

14. Mai 2025

Schnupperkurs 2025 Mathematik und Musik

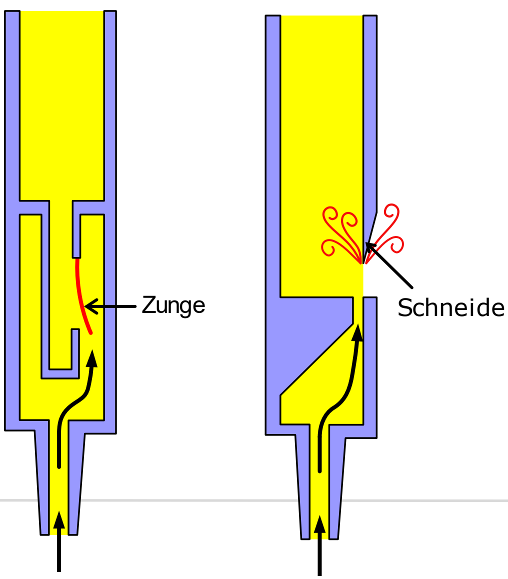
Musikalische Töne

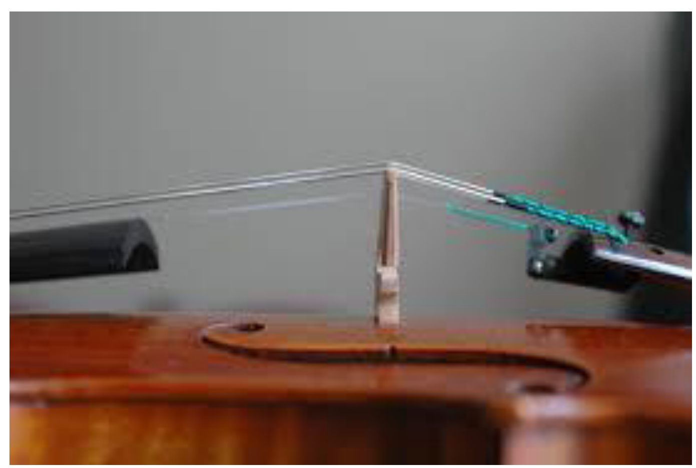


3. Tonerzeugung

Häufige Prinzipien der Tonerzeugung:

- Schwingende Saite (Zupfen, Streichen, Anschlagen)
- Schallwechseldruck in einer Luftsäule durch
  - Luftwirbel (Labialton, Kantenton)
  - Lamelle (Lingualton, Zungenton)
- Ein Resonator verstärkt die Amplitude, nur bei bestimmten Eigenfrequenzen tritt Resonanz auf.





3. Tonerzeugung

- Im Resonator breiten sich laufende Wellen verschiedener Frequenzen und Amplituden aus.
- Durch Reflexion am freien oder festen Ende entstehen gegenläufige Wellen und es kommt zur Überlagerung.
- (Nur) Bei gleichen Amplituden und gleicher Frequenz bilden sich stehende Wellen.
- Die stehende Welle ist eine ortsfeste Schwingung mit Bäuchen (maximale Amplitude) und Knoten.
- Bei Transversalwellen (Saite) schwingt die Elongation, bei Longitudinalwellen (Luftsäule) der Schalldruck.

Nach links laufende Welle: $y_1(x,t) = \mathrm{A}\sin(\omega t - kx)$

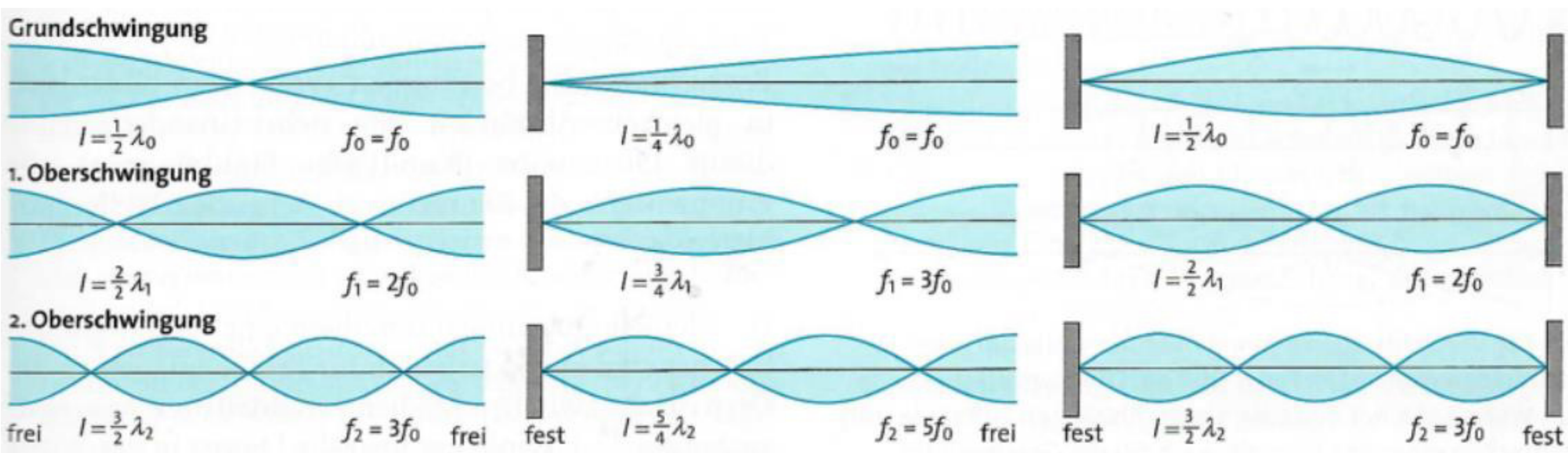
Nach rechts laufende Welle: $y_2(x,t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + kx)$

Überlagerung: $y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2\mathrm{A}\sin(\omega t)\cos(kx)$

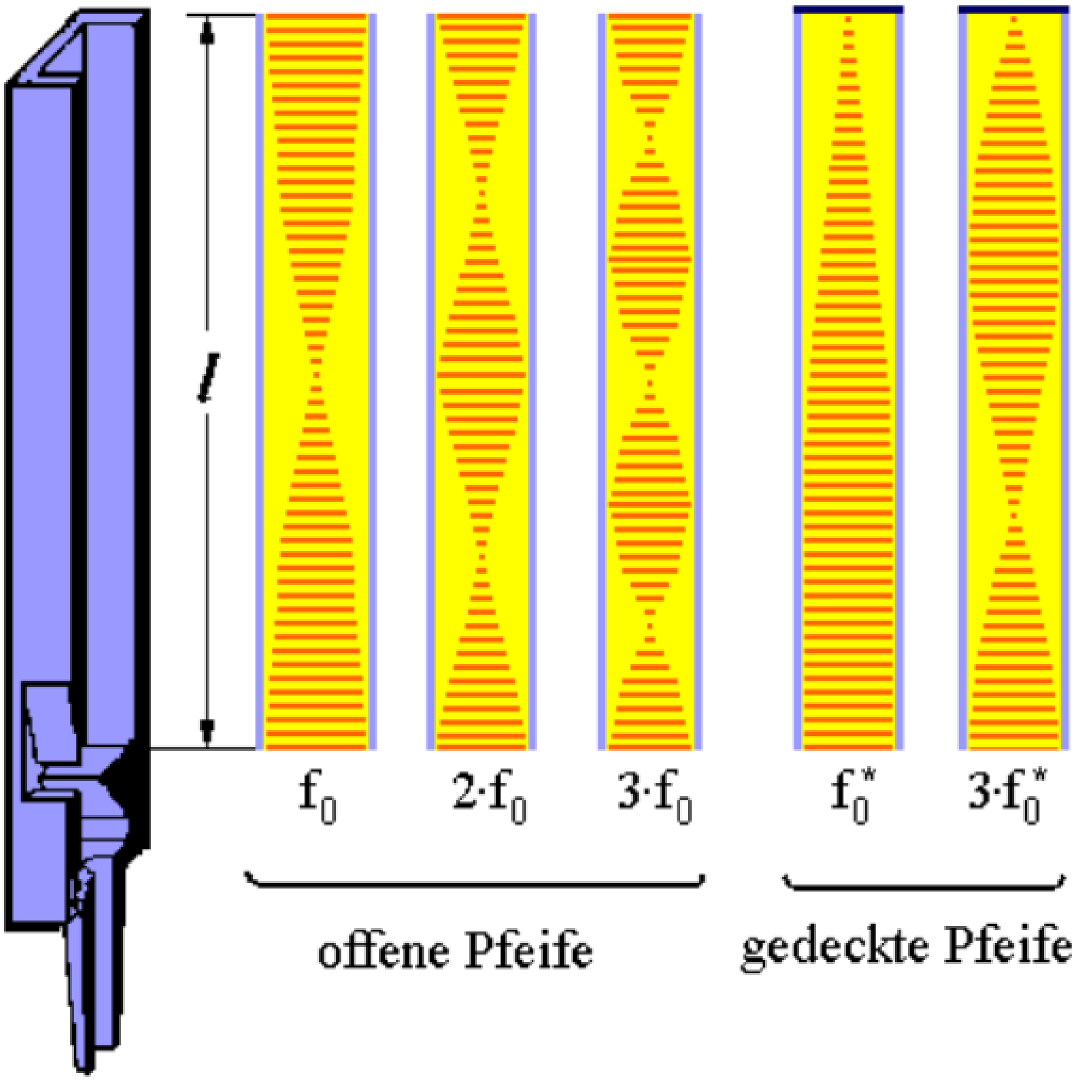
Stehende Wellen

- Stehende Wellen müssen zur Länge L und den Randbedingungen des Wellenträgers passen.
- Es bilden sich stehende Wellen mit bestimmten Eigenfrequenzen (Moden) aus: die Grundschwingung und Oberschwingungen.

$$f_n = (n+1) f_0 \qquad f_n = (2n+1) f_0 \qquad f_n = (n+1) f_0$$



Stehende Wellen



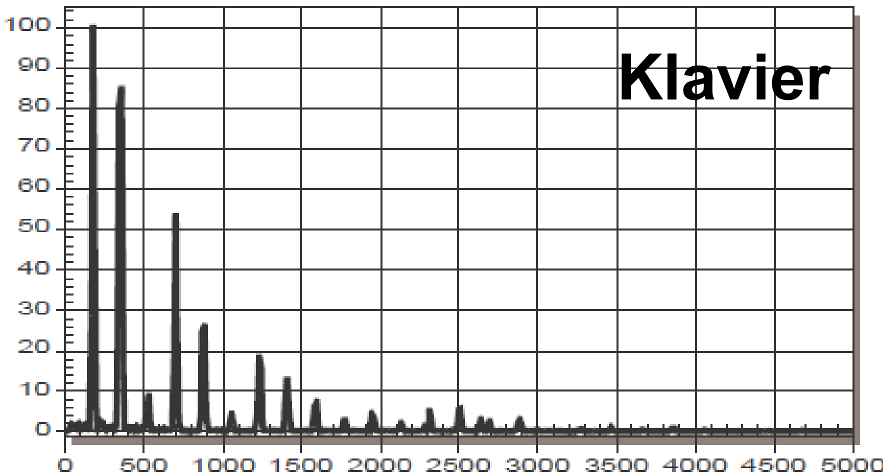
Musikalische Töne

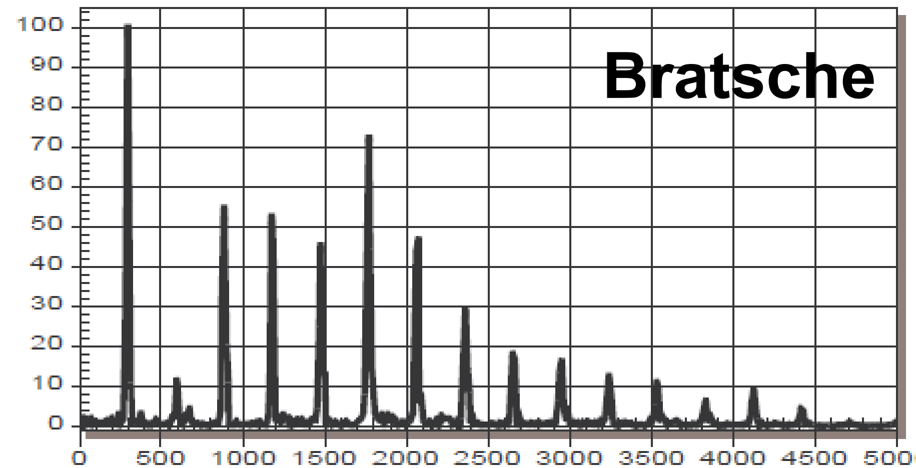
- Im Instrument werden unterschiedliche Eigenfrequenzen erzeugt und durch den Resonator unterschiedlich verstärkt.
- Wir hören eine Überlagerung des Grundtones und aller Obertöne mit verschiedenen Amplituden. Das Verhältnis der Amplituden ist charakteristisch für die Klangfarbe.
- Ein musikalischer Ton (Klang) ist eine Überlagerung physikalischer Töne mit dem Vielfachen einer Grundfrequenz f_0:

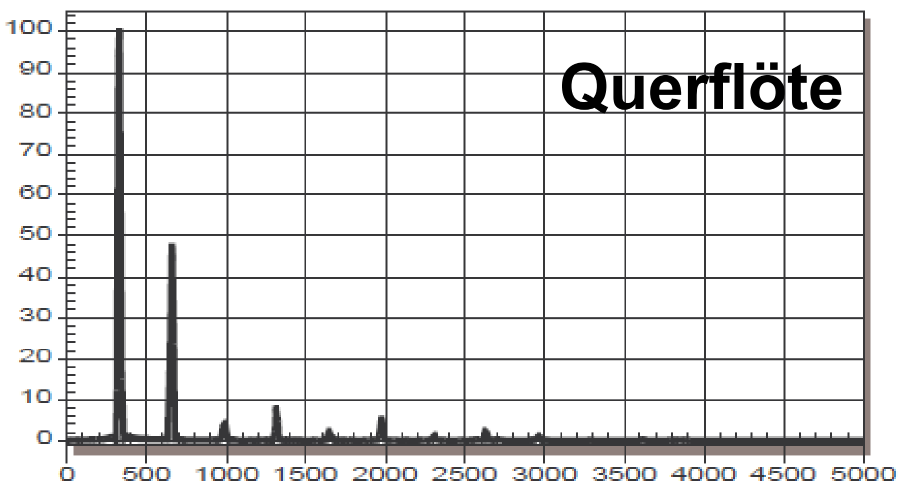
$$y(t) = A_1 \sin(2\pi f_0 t) + A_2 \sin(2\pi\, 2 f_0 t) + \ \dots\ = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

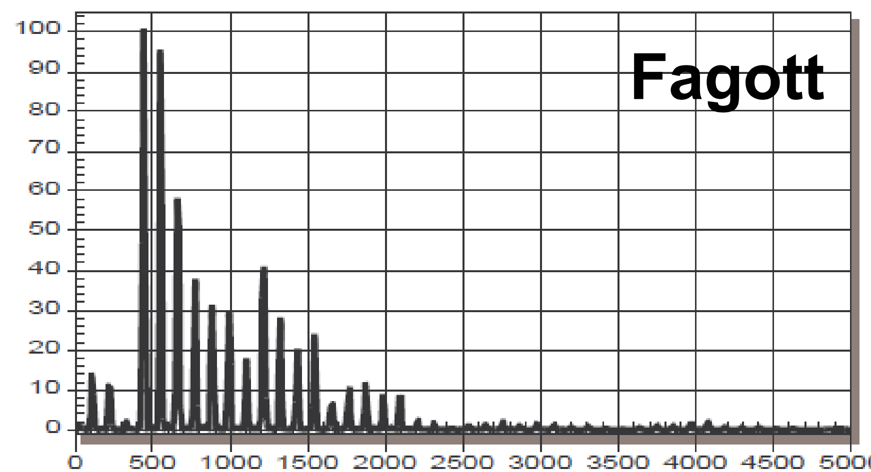
- f_0 ist die (musikalische) Tonhöhe. Um verschiedene Klangfarben zu unterscheiden, tragen wir die Amplituden A_n über den Frequenzen $n \cdot f_0$ auf. (**Fourierdiagramm**)

Musikalische Töne









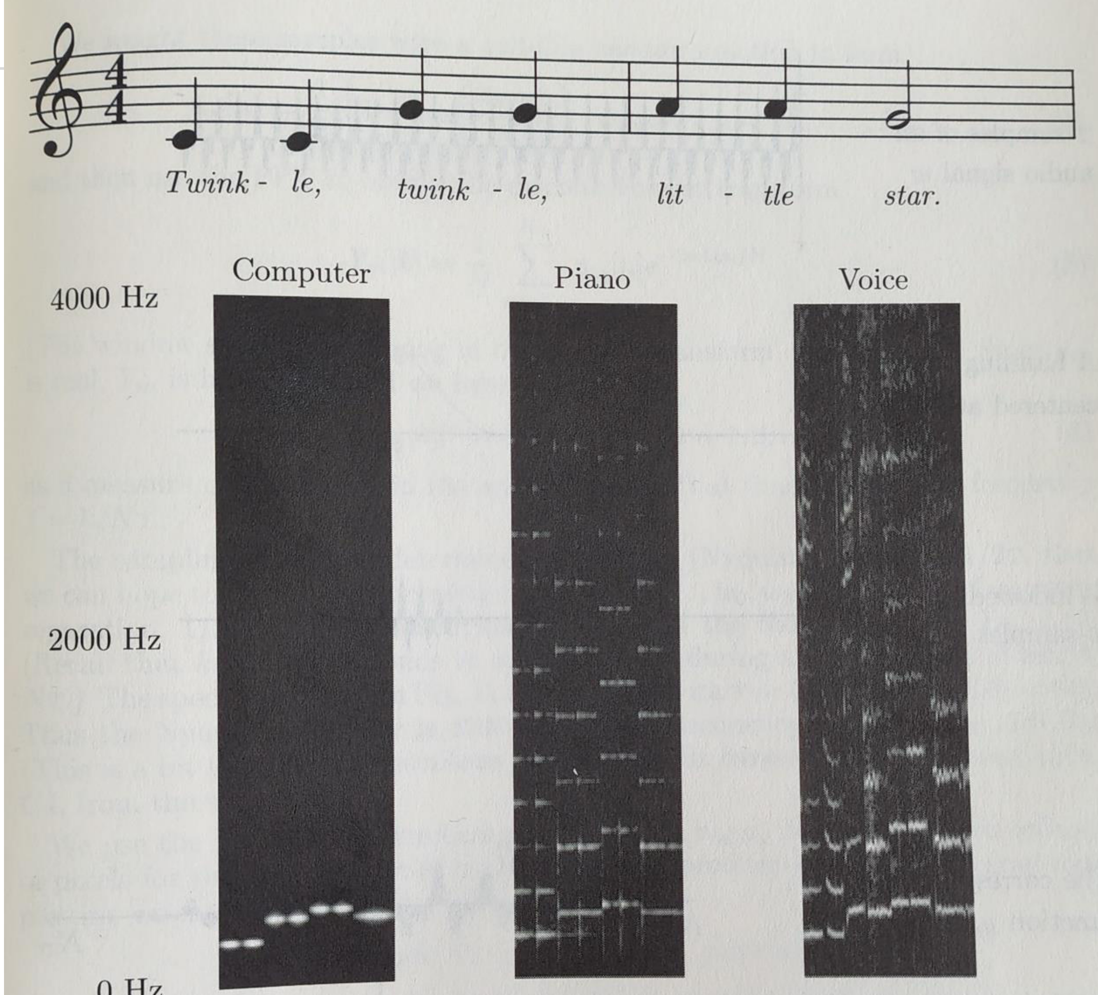
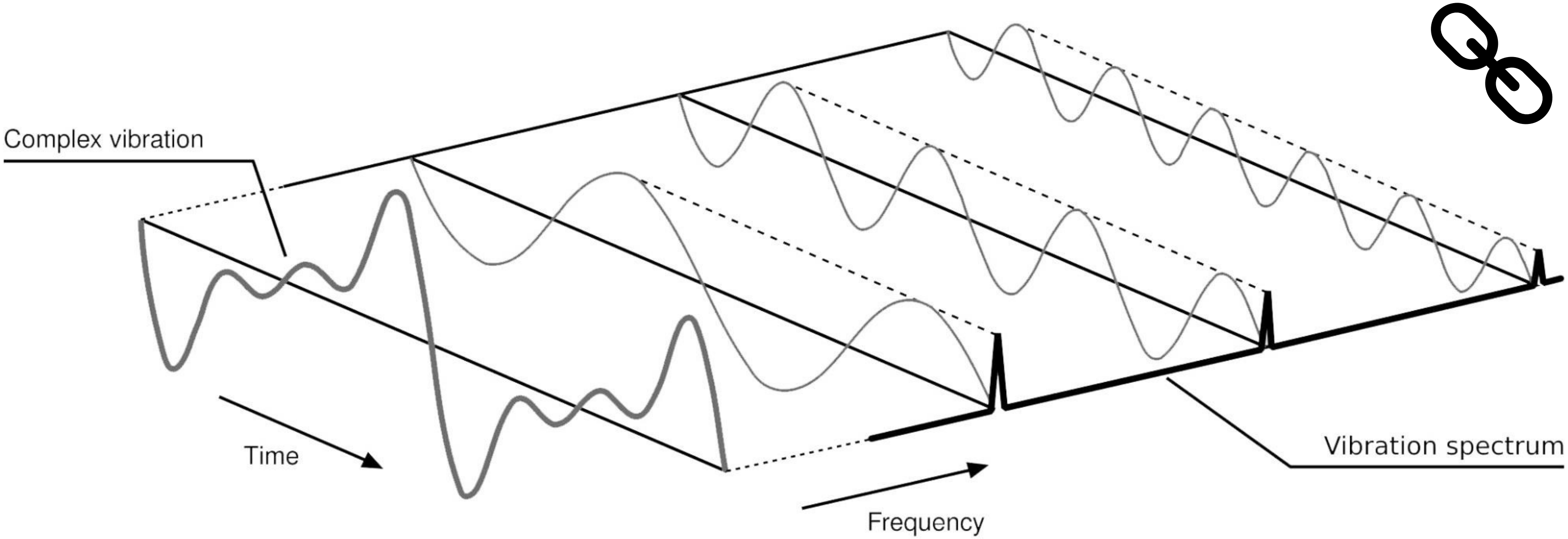


Figure 11.6. A music score and spectrograms from three corresponding sound files. In each case, time increases from 0 to 6 seconds along the horizontal axis, and frequency ranges from 0 to 4000 Hz along the vertical axis. (The notes $C4$, $G4$, $A4$ have the frequencies 261.6, 392.0, 440 Hz, respectively.)

Musikalische Töne

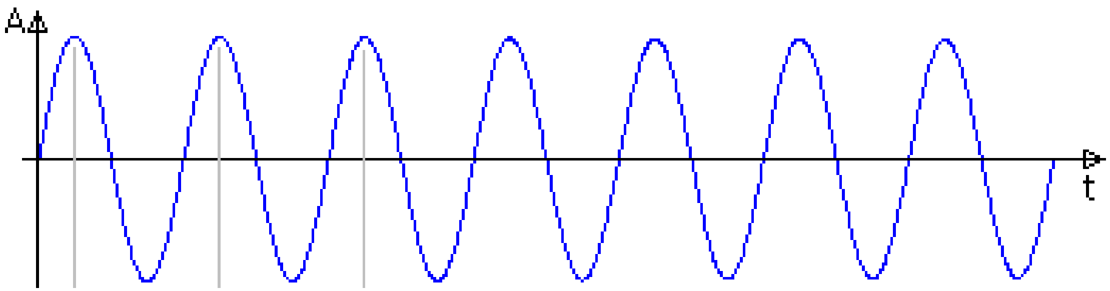


- Ein musikalischer Ton ist eine **Fourierreihe**

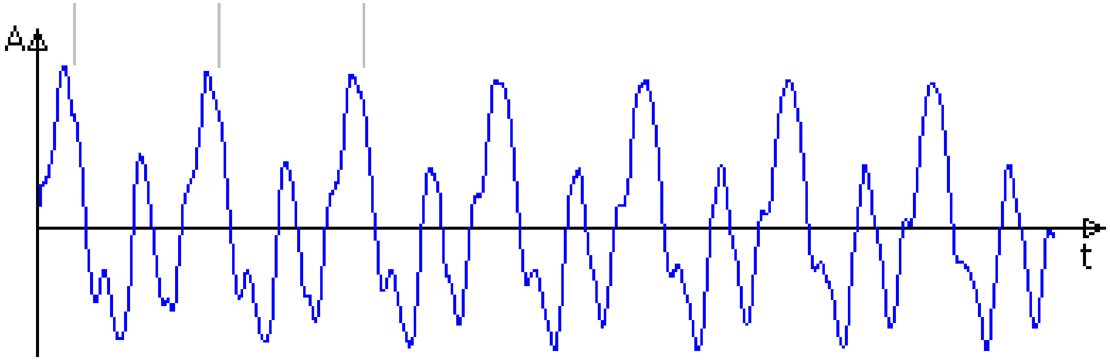
$$y(t) = A_1 \sin(2\pi f_0 t) + A_2 \sin(2\pi\, 2 f_0 t) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

- Wie kann man die Amplituden A_n berechnen? Lassen sich alle Klänge (periodische Funktionen) so zerlegen?

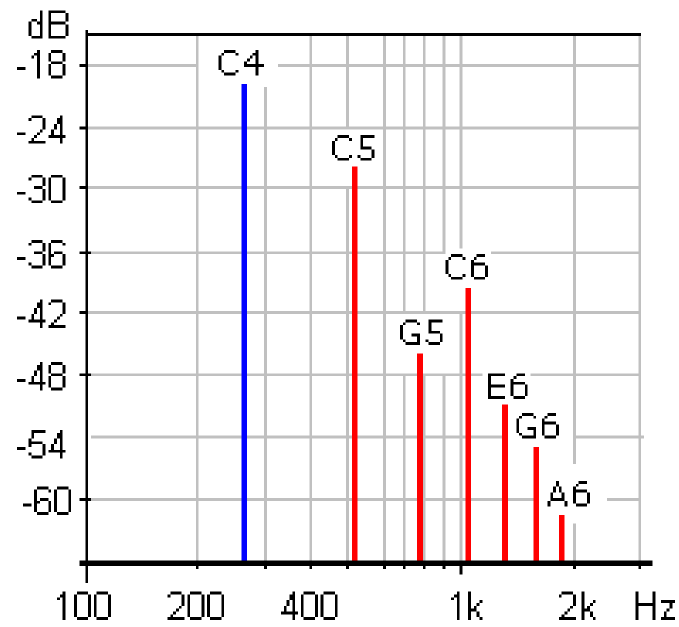
Musikalische Töne



C4 = 261,625 Hz als reinen Sinuston



C4 als Klavierton (Tonaufnahme)



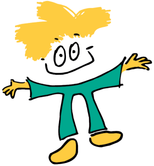
C4 261,625 Hz

C5 523,251 Hz
G5 783,991 Hz
C6 1046,502 Hz

E6 1318,510 Hz
G6 1567,982 Hz
A6 1760,000 Hz

- Die Frequenzen $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$ bilden die **Naturtonreihe** über f_0.
- *Beispiel:* $c^0, c^1, g^1, c^2, e^2, g^2, a^2, c^3, \dots$ Hier tauchen die Intervalle Oktave, Quinte, Quarte, große Terz,… in natürlicher Weise auf.

Karlsruher Institut für Technologie



Vorlesung 2.2

Kim Burgstahler, Wolf Wechinger
14. Mai 2025

SCHNUPPERKURS 2025 MATHEMATIK UND MUSIK

4. Integralrechnung

Motivation 1: Das Bewegungsgesetz der gleichförmigen Bewegung lautet $s(t) = vt$ mit konstanter Geschwindigkeit v. Im v-t-Diagramm ist der Flächeninhalt, der von $y = v$ und der x-Achse über dem Intervall $[0, t]$ eingeschlossen wird, gerade $v \cdot t = s(t)$.
So wie beim *Ableiten* von $s(t)$ an jeder Stelle t die Steigung v bestimmt wird, wird beim *Integrieren* von v der Flächeninhalt $s(t)$ über jedem Intervall $[0, t]$ bestimmt.

Motivation 2: Sei f eine Funktion und $A_0(x)$ der Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse über dem Intervall $[0, x]$. Die Änderung von $A_0(x)$ nach $A_0(x + \Delta x)$ ist im Wesentlichen gegeben durch den Flächeninhalt des Rechtecks $f(x) \cdot \Delta x$, die Änderungsrate

$$\frac{A_0(x + \Delta x) - A_0(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f(x).$$

Für $\Delta x \to 0$ folgt $A_0'(x) = f(x)$, die Änderungsrate der Flächeninhaltsfunktion A_0 ist also die Randfunktion f. Dies gilt auch für negative Funktionswerte $f(x)$, wenn wir Flächeninhalte unterhalb der x-Achse negativ zählen (*orientierter Inhalt*).

Bestimmtes Integral

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine (beschränkte) Funktion und $a \leqslant t \leqslant b$. f schließt mit der x-Achse über dem Intervall $[a, t]$ eine Fläche ein, deren *orientierten Flächeninhalt* wir berechnen: Die Fläche unterhalb der x-Achse wird negativ gewichtet. Das Ergebnis heißt das **(bestimmte) Integral** von f über $[a, t]$, geschrieben

$$\int_a^t f = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^t f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die „Flächeninhaltsfunktion“ $I_a f : [a, b] \to \mathbb{R}, I_a f(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt die **Integralfunktion** von f zur unteren Grenze a.

Beispiele: Für eine konstante Funktion $f = C$ ist $\int_a^t C\,\mathrm{d}x = C(t - a)$ (Rechteck).
Für $f(x) = mx$ ist $\int_0^t mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mt^2$ (rechtwinkliges Dreieck).
Die Funktion $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ für $-2 \leqslant x \leqslant 2$ beschreibt einen Halbkreis mit Radius 2 um den Ursprung. Daher gilt

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi.$$

Bestimmtes Integral

Wie beim Flächeninhalt gelten für das Integral die Rechenregeln

- $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ (*Additivität*). Dies gilt für beliebige a, b, c, indem man definiert $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (*Linearität*).
- Ist stets $f(x) \leqslant g(x)$, so gilt auch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (*Monotonie*).

Es gilt immer $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, also $I_a(a) = 0$. Ist m das Minimum und M das Maximum von f auf dem Intervall $[a, b]$, so gilt außerdem

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

Das Integral $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist also ein *Mittelwert* von f über dem Intervall $[a, b]$, vergleichbar mit dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f_k = \frac{1}{n}(f_1 + \ldots + f_n)$.

Bestimmtes Integral

Ist f gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$, so gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist f ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$, so gilt stets $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Ist f eine p-periodische Funktion, so hat das Integral über jedes Intervall der Länge p denselben Wert. Zum Beispiel ist $\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$, denn der Sinus ist ungerade. Genauso ist mit einer Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Für das quadratische Mittel gilt hingegen (Übung)

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Unbestimmtes Integral

Aufgrund der Überlegungen eingangs vermuten wir, dass $I_a' = f$ gilt. Eine differenzierbare Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$ heißt eine **Stammfunktion** von f.

Satz

(1) Ist F eine Stammfunktion von f und C eine Konstante, so ist auch $F + C$ eine Stammfunktion von f.

(2) Sind F und G zwei Stammfunktionen von f, so existiert eine Konstante C, sodass $F = G + C$.

BEWEIS (1) Ableiten: $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$.
(2) Die Funktion $h := F - G$ hat die Ableitung $h' = F' - G' = f - f = 0$. Also ist $h = C$ konstant, dies folgt aus dem Mittelwertsatz. Damit $F = G + h = G + C$. □

Hat man also *eine* Stammfunktion F von f gefunden, so hat man durch $F + C$ mit einer Konstanten C schon *alle* Stammfunktionen von f. Mit dem **unbestimmten Integral** $\int f = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet man *eine beliebige* Stammfunktion von f, also

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f, \qquad \int f'(x)\,\mathrm{d}x = f.$$

Unbestimmtes Integral

Zu jeder Ableitung gehört ein (unbestimmtes) Integral und umgekehrt. Dabei ist Integrieren häufig viel schwieriger als Ableiten:

$$\int \log x \,\mathrm{d}x = x(\log x - 1), \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x, \qquad \int e^{x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Die Integrale der elementaren Funktionen sind

$$\int 1 \,\mathrm{d}x = x, \qquad \int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n}\ (n \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} = \log|x|,$$
$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x, \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x, \qquad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x.$$

Zu jeder Ableitungsregel gehört eine Integrationsregel, zum Beispiel die Linearität

$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partielle Integration

Aus der Produktregel folgt die Regel von der **partiellen Integration**:

$$\int f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x.$$

Damit kann man zum Beispiel Polynome „herunterdifferenzieren“: $\int xe^x \,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \,\mathrm{d}x = (x-1)e^x$.
Integrale trigonometrischer Funktionen reproduzieren sich häufig selbst:

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x \,\mathrm{d}x,$$

also ist $2 \int \cos^2 \,\mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int 1 \,\mathrm{d}x$ und $\int \cos^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x)$.

Beachte: Aus $\int f(x) \,\mathrm{d}x = F(x)$ und $\int f(x) \,\mathrm{d}x = G(x)$ folgt nicht $F = G$, sondern nur $F = G + C$ für eine Konstante C. *Beispiel:*

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x\frac{1}{x} - \int x\frac{-1}{x^2} \,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Integration durch Substitution

Aus der Kettenregel folgt die **Substitutionsregel**

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)).$$

Man berechnet also ein Integral der linken Form, indem man f' integriert und dann $g(x)$ in f einsetzt: $\int \sin^4 x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin^5 x$ oder auch

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}(-2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Zwei wichtige Spezialfälle der Substitutionsregel sind

$$\int f'(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}f(ax+b), \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log|f(x)|,$$

zum Beispiel ist $\int \frac{x+5}{x^2+10x-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log|x^2+10x-4|$.

Integration durch Substitution

Häufig schreibt man einen Integranden $f'(x)$ künstlich in der Form $f'(g(t))g'(t)$ und setzt dann $t = g^{-1}(x)$ in f ein. *Merkregel:* $x = g(t),\ \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Als *Beispiel* wollen wir $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Wir substituieren $x = \sin t$, also $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(\sin t\cos t + t) = \frac{1}{2}\left(\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + t\right).\end{aligned}$$

Die Rücksubstitution $t = \arcsin x$ ergibt schließlich

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right).$$

Der Flächeninhalt des Halbkreises mit Radius 1 um den Ursprung ist tatsächlich $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$.

Der Hauptsatz

Eines der wichtigsten Resultate der Analysis ist, dass Ableiten und Integrieren Umkehrungen voneinander sind; das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ kann also mit einem unbestimmten Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet werden.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
(1) Die Integralfunktion I_a ist eine Stammfunktion von f.
(2) Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Es ist also $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\int f(x)\,\mathrm{d}x]_a^b$.

BEWEIS (2) Ist (1) schon bewiesen, so folgt sofort $I_a(x) = F(x) + C$ für eine Konstante C. Wegen $I_a(a) = 0$ ist $C = -F(a)$ und $x = b$ ergibt die Behauptung $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_a(b) = F(b) - F(a)$.

Der Hauptsatz

(1) Sei $x \in [a, b]$ und $h > 0$. Der Differenzenquotient für die Integralfunktion ist

$$\frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Das letzte Integral lässt sich abschätzen durch $hm \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant hM$, wobei m das Minimum und M das Maximum von f auf dem Intervall $[x, x+h]$ bedeuten. Damit ist für $h > 0$

$$m \leqslant \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \leqslant M,$$

für $h < 0$ erhält man mit einer analogen Argumentation dasselbe Ergebnis.
Da f stetig ist, konvergieren m und M für $h \to 0$ gegen $f(x)$, wir erhalten also

$$I_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} = f(x). \;\square$$

Der Hauptsatz

Wir können nun unsere Überlegungen zu bestimmten und unbestimmten Integralen zu einem mächtigen Kalkül kombinieren. So ist zum Beispiel

$$\int_a^b x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$$

der Flächeninhalt unterhalb der Parabel im Intervall $[a, b]$. Die von Sinus und Kosinus im Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ eingeschlossene Fläche hat den Inhalt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x \,\mathrm{d}x = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$$

Mit partieller Integration berechnen wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \,\mathrm{d}x = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Der Hauptsatz

Die Substitutionsregel für bestimmte Integrale lautet

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Hier muss natürlich nicht rücksubstituiert werden. Die lineare Substitution ist auch geometrisch anschaulich:

$$\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b f(x+d)\,\mathrm{d}x = \int_{a+d}^{b+d} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel: Mit der Substitution $x = \sin t$ ist $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ und daher

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{6}.$$