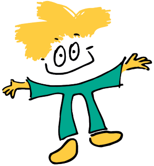
Karlsruher Institut für Technologie



Vorlesung 1.1

Kim Burgstahler, Wolf Wechinger
30. April 2025

SCHNUPPERKURS 2025 MATHEMATIK UND MUSIK

Ziele

Einblick in die universitäre Lehre

- Klassisches Schema: Vorlesung und Übungen
- Eigenverantwortung bei Anwesenheit, Aufmerksamkeit, Vorbereitung und Nachbereitung, Literaturrecherche, Bearbeitung der Übungsaufgaben u.s.w.
- Selbstorganisiertes Arbeiten und Lernen
- Umgang mit Nichtverstehen und Scheitern

Einblick in die universitäre Mathematik

- Bekannter Schulstoff unter neuen Blickwinkeln (Vernetzung, Vertiefung, Vereinheitlichung)
- Neue Inhalte und Begriffe aus der Anfangs- und Spätphase des Studiums
- Eher axiomatische, „rigorose“, „höhere“ Mathematik
- Fächerübergreifend: Mathematik, Musik, Physik

Methode

Vorlesung

- Sechs Termine mittwochs 15:45 bis 17:15 Uhr in Raum 0.001 des Mathematikgebäudes (Wolf Wechinger)
- Neue Inhalte werden vorgestellt und kommentiert
- Folien werden vorab auf der Webseite des Schnupperkurses zur Verfügung gestellt: https://didaktik.math.kit.edu/474.php

Methode

Übungen

- Sechs Termine nach der Vorlesung bis 18:00 Uhr (Kim Burgstahler)
- Ein Übungsblatt wird ausgeteilt (auch auf der Webseite) und kommentiert. Sie wählen selbstständig geeignete Aufgaben zur Bearbeitung aus.
- Eigenständige Bearbeitung alleine oder in Kleingruppen zunächst in der Übung, dann zuhause. Empfehlung: Zuerst die Vorlesung wiederholen.
- Die Aufgaben können bis zum nächsten Dienstag zur Korrektur abgegeben werden. *Vorgabe:* Eine (!) pdf-Datei, benannt mit Namen und Übungsblattnr.
- Danach werden Lösungshinweise auf der Webseite zur Verfügung gestellt.
- Für Fragen, Hinweise u.s.w. jederzeit E-Mail an: wechinger@kit.edu oder uwnkv@student.kit.edu

Bei erfolgreicher Teilnahme erhält man ein Zertifikat.

Inhalte

(1) Differentialrechnung, Akustik: Töne und Tonwahrnehmung

(2) Akustik: Klänge und stehende Wellen, Integralrechnung

(3) Wellengleichung, Fourierreihen

(4) Fourieranalysis, $L^2[-\pi, \pi]$

(5) & (6) Monochord, pythagoräisches Komma, Temperation, Skalen

Literaturhinweise

- Helmholtz: Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik (1863)
- Fletcher/ Rossing: The Physics of Musical Instruments (Springer 1998)
- Grehn/ Krause: Metzler Physik (Schroedel 2012)
- Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1 und 2; Funktionalanalysis (Teubner)
- Walter: Analysis 2 (Springer 1995)
- Reed/ Simon: Methods of Mathematical Physics I (Academic Press 1980)
- Kammler: A First Course in Fourier Analysis (Cambridge UP 2007)
- Kersting: Die Mathematik hinter Klang und Musik (Birkhäuser 2023)
- Schüffler: Die Tonleiter und ihre Mathematik; Proportionen und ihre Musik (Springer)
- Benson: Music: A Mathematical Offering (2006)
- Spitzer: Musik im Kopf (Schattauer 2002)

1. Etwas Differentialrechnung

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a < x_0 < b$. Falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert, heißt f **differenzierbar** und $f'(x_0)$ die **Ableitung** von f an der Stelle x_0. Die Zahl $f'(x_0)$ ist anschaulich die *momentane Änderungsrate* oder die *Steigung der Tangenten* an f an der Stelle x_0.

Ist f an jeder Stelle $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf (a, b) und die Funktion $f' : (a, b) \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ die **Ableitung** von f.

Ist f' wiederum differenzierbar, so heißt die Ableitung von f' die **zweite Ableitung** $f'' := (f')'$ von f u.s.w. Die n-te Ableitung bezeichnet man mit $f^{(n)}$.
Statt f' schreibt man auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, statt f'' auch $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ u.s.w.

Beim Ableiten schreibt man gelegentlich auch $(f(x))'$ statt $f'(x)$ oder $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ statt $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$. *Beispiel:* $(x^2)' = 2x$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + e^x) = e^x$.

Zeitliche Ableitungen

Wir bezeichnen Ableitungen nach der Zeit mit einem Punkt statt einem Strich: Ist zum Beispiel $s(t)$ der Ort eines Objektes zur Zeit t, so ist die Ableitung $\dot{s}(t) = v(t)$ die momentane Geschwindigkeit und die zweite Ableitung $\ddot{s}(t) = \dot{v}(t) = a(t)$ die Beschleunigung dieses Objektes zur Zeit t.

Beispiel: Für das Bewegungsgesetz des freien Falls $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ist

$$\frac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t - t_0} = \frac{1}{2}g\frac{(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{2}g(t + t_0) \to gt_0 \ (t \to t_0)$$

und daher $v(t_0) = \dot{s}(t_0) = gt_0$ das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz. Die Beschleunigung ist konstant, nämlich die Erdbeschleunigung:

$$a(t_0) = \dot{v}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{gt - gt_0}{t - t_0} = g.$$

Partielle Ableitungen

Sei $f(x,t)$ eine Funktion mehrerer Variable, z. B. des Ortes x und der Zeit t. Für jedes t kann man $x \mapsto f(x,t)$ differenzieren, als ob t konstant wäre. So erhält man die **partielle Ableitung** von f nach x und schreibt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) = \partial_x f(x_0,t) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Entsprechend die partielle Ableitung von f nach t:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) = \partial_t f(x,t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}.$$

Mehrfache Ableitungen nach derselben Variable bezeichnet man mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ oder $\partial_x^2 f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ oder $\partial_t^2 f$ u.s.w. Bei gemischten Ableitungen spielt es nach dem **Satz von Schwarz** keine Rolle, in welcher Reihenfolge man ableitet:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}.$$

Partielle Ableitungen

Beachte: Um $\partial_x f(x, t_0)$ zu berechnen, spielt es nach Definition keine Rolle, ob man erst $\partial_x f(x, t)$ berechnet und dann $t = t_0$ einsetzt oder ob man erst $t = t_0$ einsetzt und dann $f(x, t_0)$ nach x ableitet.

Beispiel: Für $f(x, t) = xe^t + \sin(xt)$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^t + t\cos(xt), \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = xe^t + x\cos(xt).$$

Um $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 1$ zu berechnen, kann man auch $f(x, 0) = x$ nach x differenzieren. Für die gemischte zweite Ableitung gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(x, t) = e^t + \cos(xt) - xt\sin(xt).$$

Um Ausdrücke wie $f(x + ct, 2t)$ (partiell) nach t abzuleiten, braucht man die mehrdimensionale Kettenregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + ct, 2t) = c\partial_x f(x + ct, 2t) + 2\partial_t f(x + ct, 2t)$.

Ableitungsregeln

Sind f, g differenzierbar (an der Stelle x), so auch das Vielfache $\lambda \cdot f$, die Summe $f + g$, das Produkt $f \cdot g$ und im Fall $g(x) \neq 0$ auch der Quotient $\frac{f}{g}$:

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \qquad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Insbesondere gilt $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$, falls $g(x) \neq 0$.

Für die Verkettung $f \circ g(x) = f(g(x))$ gilt die **Kettenregel**:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

In Leibniz-Notation hat sie die Form $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

Ableitungsregeln

Karlsruher Institut für Technologie

Potenzfunktionen $(x^\lambda)' = \lambda x^{\lambda-1}$, insbesondere

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exponentialfunktionen $(a^x)' = \log(a) \cdot a^x$, insbesondere $(e^x)' = e^x$, und der **Logarithmus** $(\log x)' = \frac{1}{x}$.
Trigonometrische Funktionen $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$. *Beispiele:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin^2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 2\sin\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \cos\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \left(3x^2 - \frac{3}{x^4}\right).$$

$$(x^x)' = \left(e^{x\log x}\right)' = e^{x\log x}\left(\log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1).$$

Aus der Kettenregel ergeben sich außerdem die nützlichen Regeln

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ableitungsregeln

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *p*-**periodisch**, falls $f(x+p) = f(x)$ für alle x gilt. f heißt **gerade**, falls $f(-x) = f(x)$, und **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x.

Satz

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(1) Ist f eine p-periodische Funktion, so auch f'.

(2) Ist f gerade, so ist f' ungerade.

(3) Ist f ungerade, so ist f' gerade.

BEWEIS (1) Im Differenzenquotienten ist

$$\frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) = \frac{1}{h}\left(f(x_0+p+h) - f(x_0+p)\right),$$

mit $h \to 0$ also $f'(x_0) = f'(x_0+p)$.

Ableitungsregeln

Karlsruher Institut für Technologie

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ***p*-periodisch**, falls $f(x+p) = f(x)$ für alle x gilt.
f heißt **gerade**, falls $f(-x) = f(x)$, und **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x.

Satz

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(1) Ist f eine p-periodische Funktion, so auch f'.

(2) Ist f gerade, so ist f' ungerade.

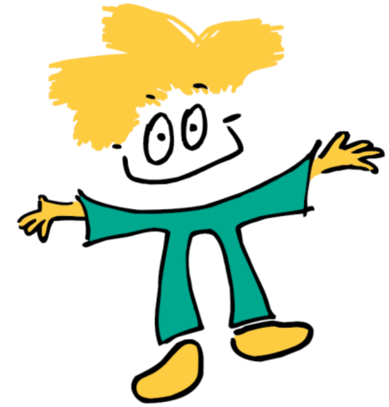
(3) Ist f ungerade, so ist f' gerade.

BEWEIS (2) Im Differenzenquotienten ist

$$\frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) = -\frac{1}{-h}\left(f(-x_0-h) - f(-x_0)\right).$$

Mit $h \to 0$ geht auch $-h \to 0$ und es folgt $f'(x_0) = -f'(-x_0)$.
(3) Übung. $\square$

Karlsruher Institut für Technologie



Vorlesung 1.2

Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

30. April 2025

Schnupperkurs 2025 Mathematik und Musik

2. Was ist ein Ton?

Musik

besteht aus **Harmonien**

bestehen aus **Intervallen**

bestehen aus **Tönen**

Was ist ein Ton?

2. Was ist ein Ton?

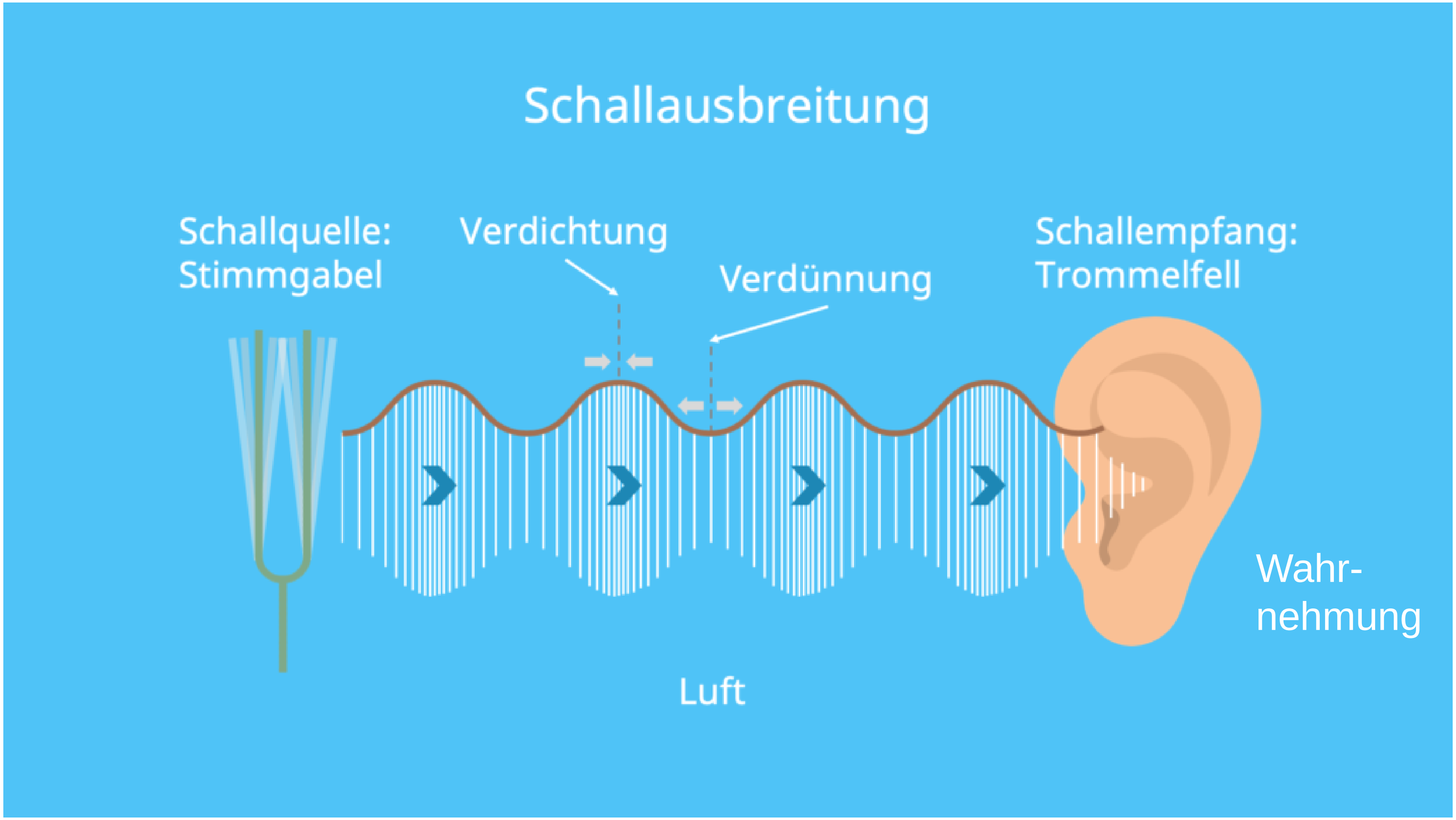
In der **Musik**: Der Ton *a*

Töne unterscheiden sich nach

- Tonhöhe
- Lautstärke/ Dynamik
- Klangfarbe

2. Was ist ein Ton?

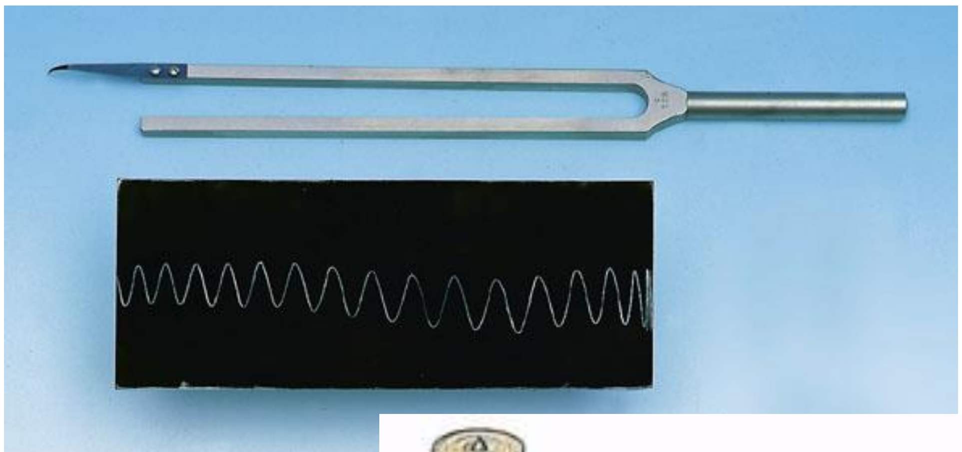
In der **Physik** (Akustik):

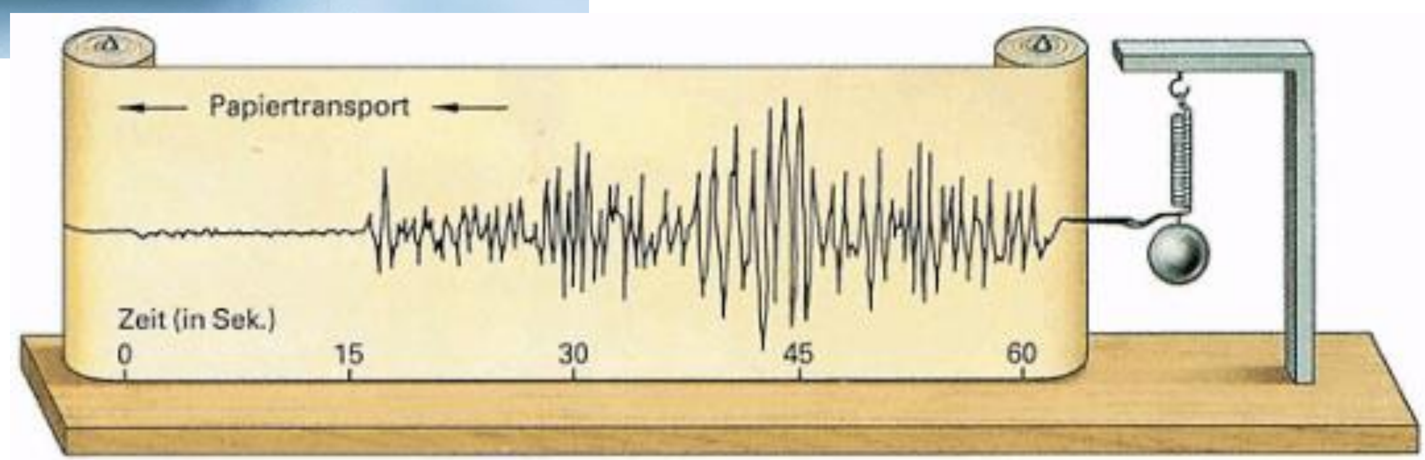


Schallerzeugung

In der **Physik** (Akustik):

- Schallerzeugung: Mechanisches Ereignis an einer Schallquelle



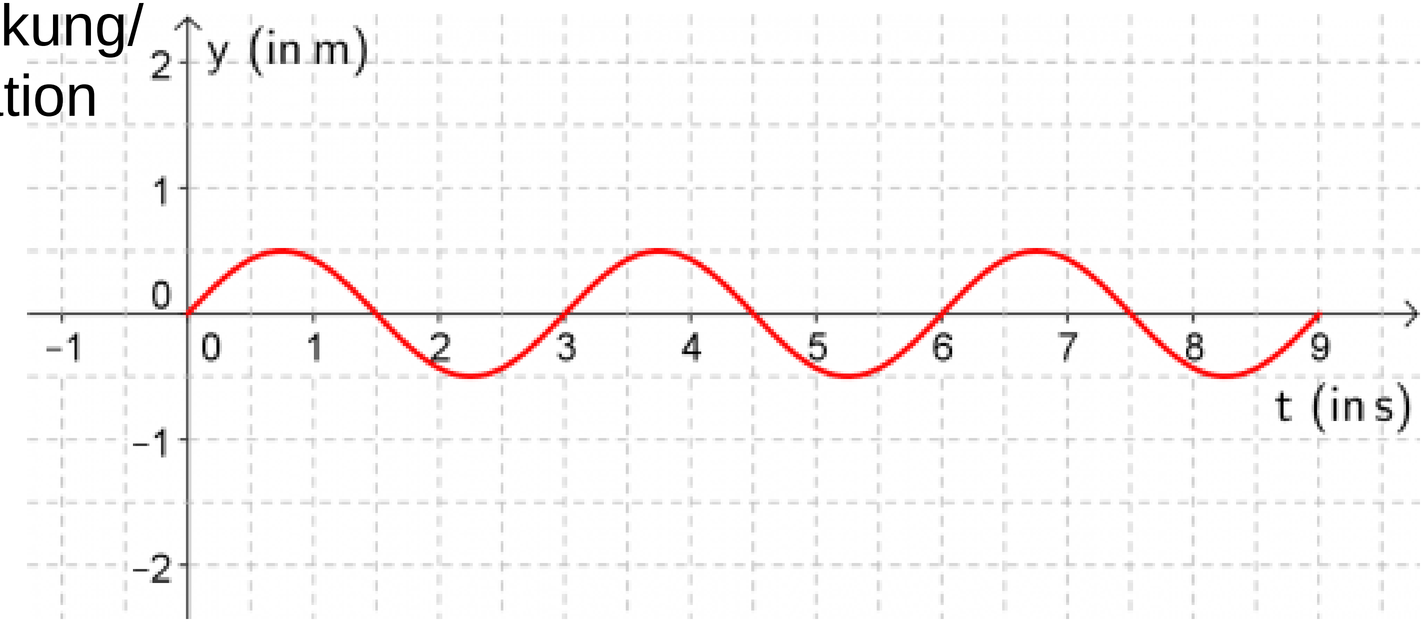


Schallerzeugung

In der **Physik** (Akustik):

- Schallerzeugung: Mechanisches Ereignis an einer Schallquelle
- Das Schwingungsdiagramm zeigt Amplitude und Periodendauer T bzw. Frequenz $f = \frac{1}{T}$

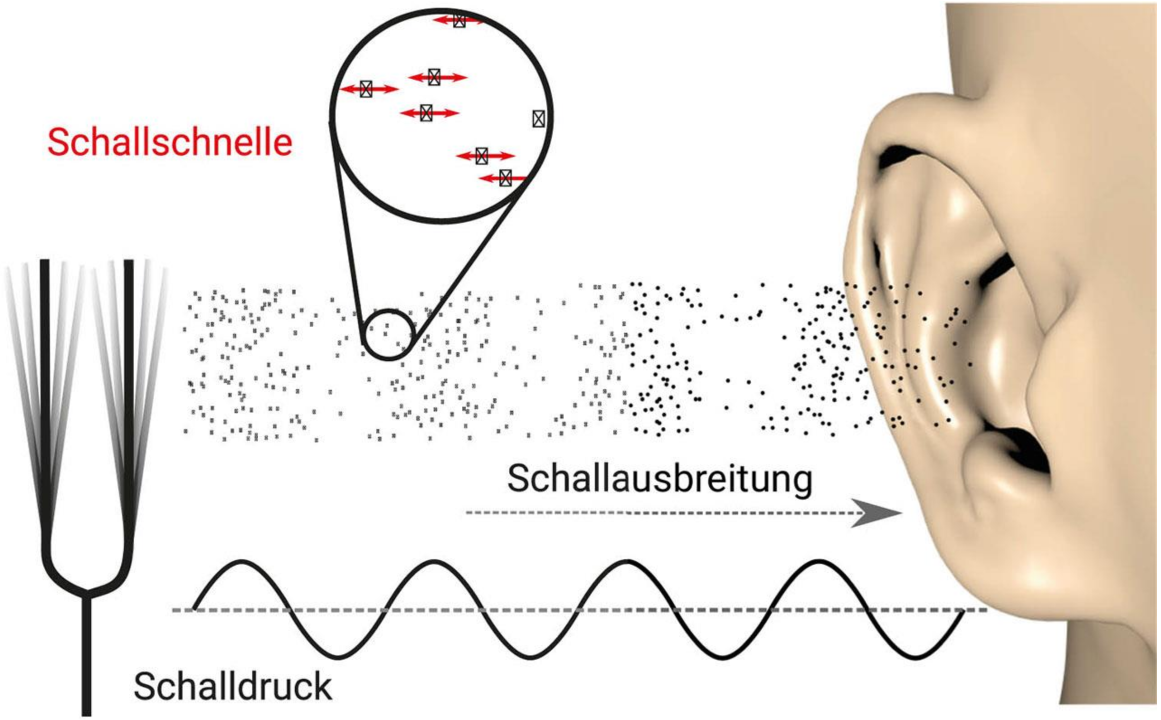
Auslenkung/
Elongation



Schallausbreitung

In der **Physik** (Akustik):

- Schallausbreitung geschieht über ein Medium (Gas, Flüssigkeit, Festkörper)
- Schall ist eine longitudinale mechanische Druckwelle.
- Wellen transportieren Energie, aber keine Masse.
- Wir nehmen Druckschwankungen $p = p_{Atmo} \pm \Delta p$ wahr, nicht die Geschwin-digkeit der Teilchen (Schnelle).



Schallausbreitung

In der **Physik** (Akustik):

- Schallausbreitung geschieht über ein Medium (Gas, Flüssigkeit, Festkörper)
- Orte gleicher Phase (z.B. Druckminima) legen in einer Periode T die Wellenlänge λ zurück. (Phasengeschwindigkeit)
- Bei linearer Dispersion breitet sich die Schallwelle mit derselben Geschwindigkeit $c = \lambda \cdot f$ aus. (Gruppengeschwindigkeit)
- Das Medium bestimmt Dispersion, Schallgeschwindigkeit, Dämpfung u.s.w.
- Luft ist nicht dispersiv, aber die Schallgeschwindigkeit hängt u.a. von Druck, Temperatur und Luftfeuchtigkeit ab. $c \approx 340\,\frac{m}{s}$

Laufende Welle

Der Schallerzeuger schwinge an der Stelle $x = 0$ in der Form
$y_0(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = A\sin(2\pi f t)$.

Die Welle hat sich zur Zeit $\frac{x}{c}$ bis zur Stelle x ausgebreitet und wird dann dort zur Schwingung $y_0(t)$ angeregt:

$$y(x,t) = A\sin\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = A\sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right) = A\sin(\omega t - kx)$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

$y(x,t)$ erfüllt also die (homogene) Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

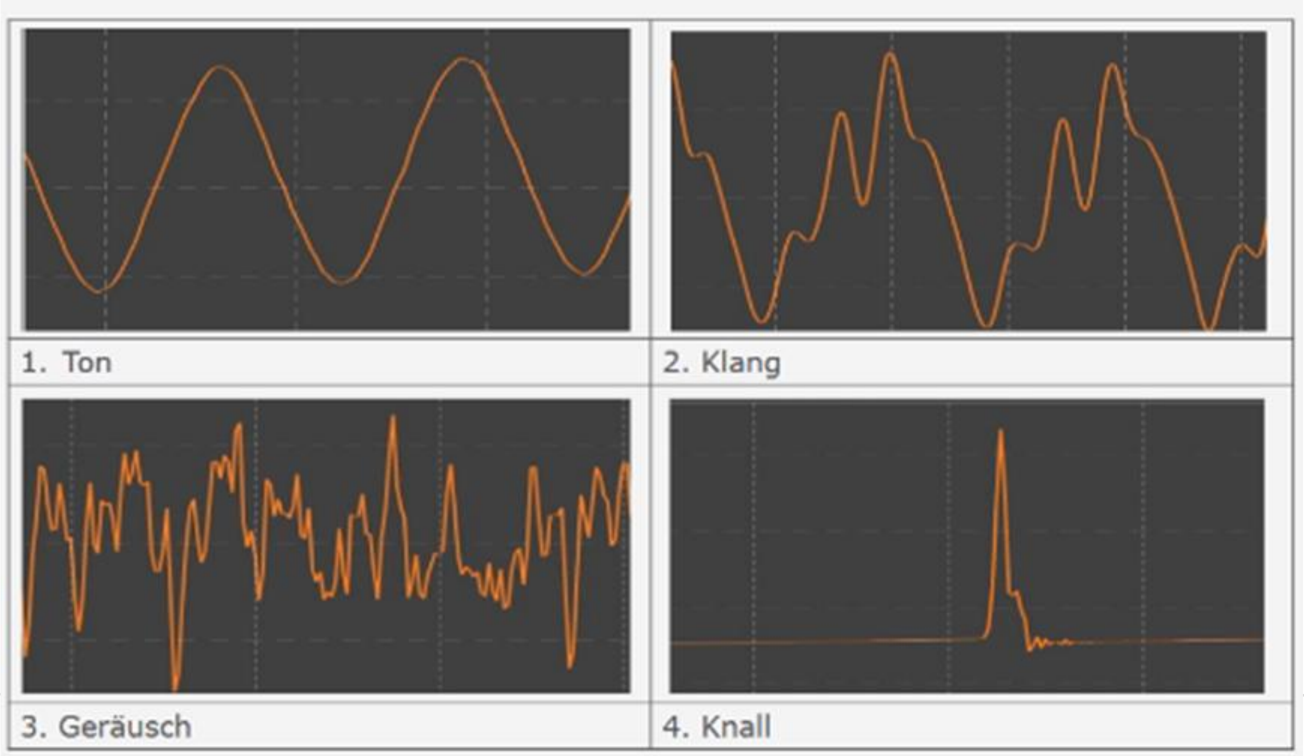
mit der Schallgeschwindigkeit $c = \lambda f = \frac{\omega}{k}$.

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung.

Schallempfang

In der **Physik** (Akustik):

- Schallwellen regen einen Empfänger an (z.B. Trommelfell, Mikrophon)
- Das Ohr und die biochemische Signalverarbeitung bestimmen die Hörwahrnehmung. (Psychoakustik)



Hörwahrnehmung

- Lautstärke und Tonhöhe sind fundamentale Sinne
- Die Tonhöhe wird bestimmt durch die Frequenz $f = \frac{1}{T}$ des Schall(wechsel)drucks
- Die Lautstärke wird bestimmt durch die Intensität I des Schalldrucks, also die Schallleistung pro Fläche
- I ist proportional zur Amplitude des Schalldrucks im Quadrat
- Die Hörschwelle des Menschen ist bei $f \approx 1000\ Hz$ maximal, nämlich $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$, zugehöriger Schalldruck $p_0 = 20\ \mu Pa$. Die Schmerzgrenze liegt bei $10\frac{W}{m^2}$.

Hörwahrnehmung

- **Weber-Fechner-Gesetz**: Wir nehmen grundsätzlich nicht linear wahr, sondern logarithmisch.

Beispiele: Lautstärke, Tonhöhe, Helligkeit, Druck, Gewicht, Geschmack/ Konzentration, Temperatur

Hörwahrnehmung: Lautstärke

- **Weber-Fechner-Gesetz**: Wir nehmen grundsätzlich nicht linear wahr, sondern logarithmisch.
- Intensitätspegel $L_I = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)\ dB$

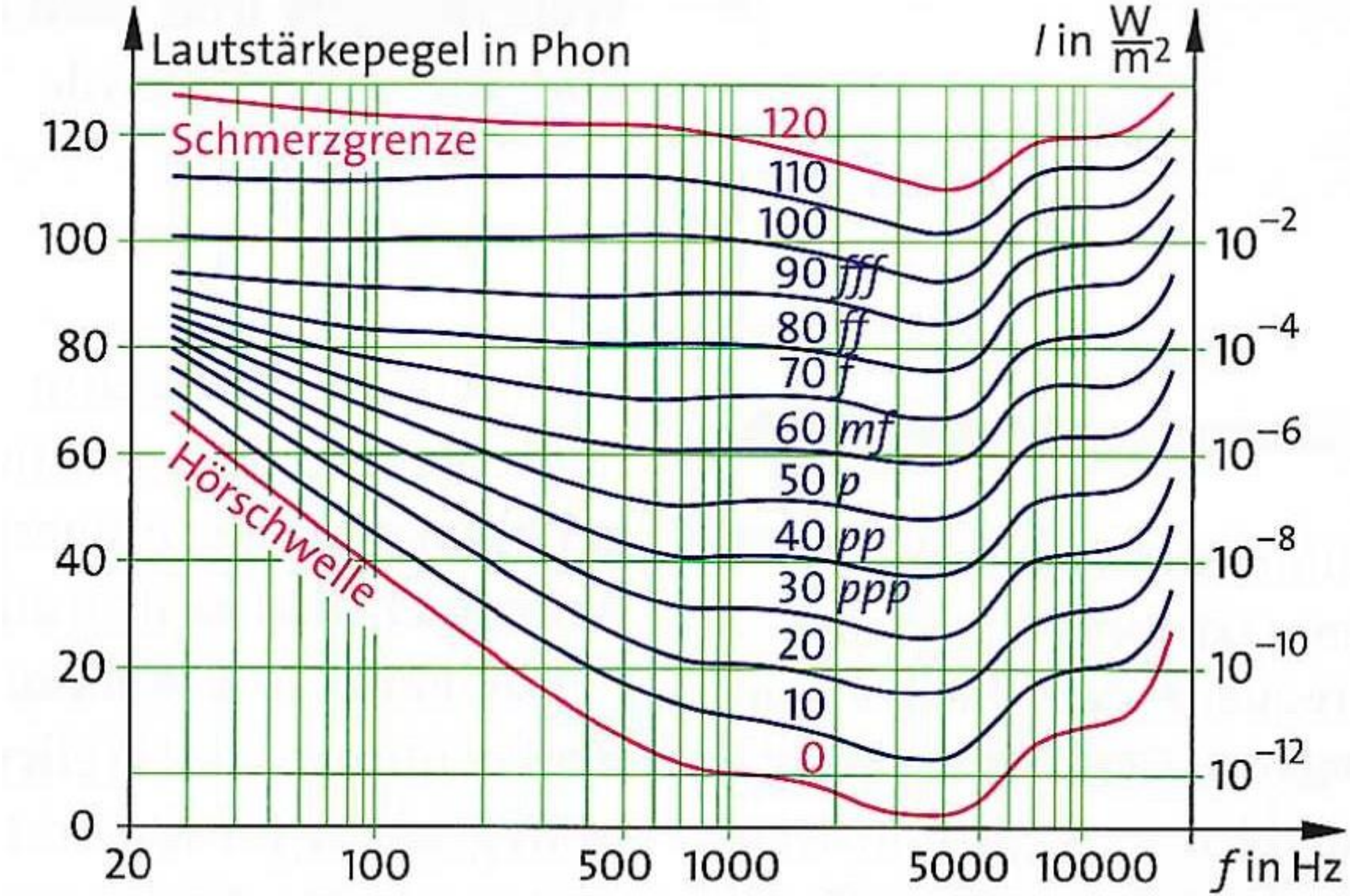
Die Einheit Dezibel (dB) ist dimensionslos, $+10\ dB$ bedeuten eine Verzehnfachung der Intensität. I_0 entspricht $0\ dB$, die Schmerz-grenze liegt bei $130\ dB$, negative dB sind möglich.

- Schalldruckpegel $L_p = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p^2}{p_0^2}\right) dB = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right)\ dB$.

Hier wird häufig der Effektivwert $\frac{p}{\sqrt{2}}$ statt der Amplitude p verwendet.

- Die wahrgenommene Lautstärke hängt auch von der Frequenz ab, daher verwendet man die empirische Einheit Phon ($1\ Phon \cong 1\ dB$)

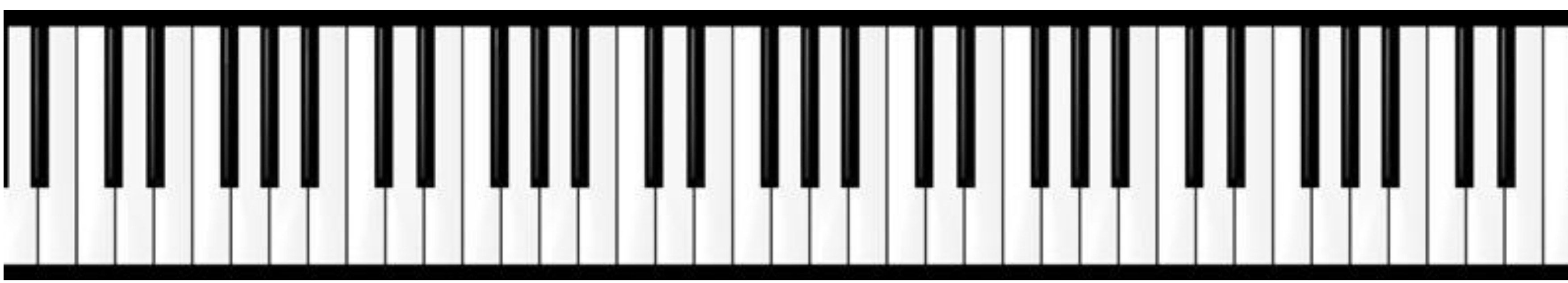
Hörwahrnehmung: Lautstärke



Hörwahrnehmung: Tonhöhe

- **Weber-Fechner-Gesetz**: Wir nehmen grundsätzlich nicht linear wahr, sondern logarithmisch.
- Der musikalische Ton (a^1) ist eine logarithmische Skala von f: Eine Oktave höher entspricht einer Verdopplung der Frequenz.
- Bezugston ist ein Grundton oder der Kammerton ($a^1,\ 440\ Hz$).
- Man teilt jede Oktave in 12 Halbtöne und jeden Halbton in 100 Cent. Intervalllänge im Centmaß: $1200 \cdot \log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)\ Cent$

Warum?



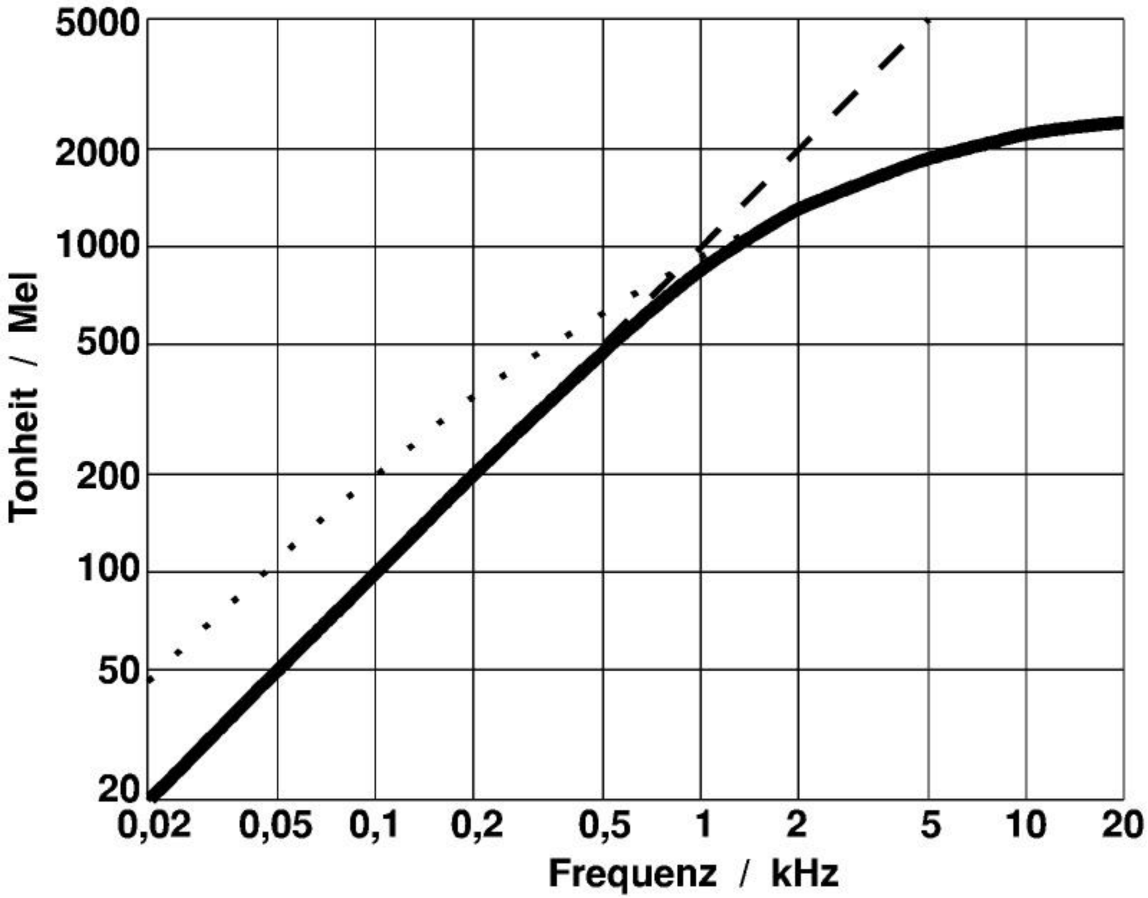
Hörwahrnehmung: Tonhöhe

- **Weber-Fechner-Gesetz**: Wir nehmen grundsätzlich nicht linear wahr, sondern logarithmisch.
- Der musikalische Ton (a^1) ist eine logarithmische Skala von f: Eine Oktave höher entspricht einer Verdopplung der Frequenz.
- Bezugston ist ein Grundton oder der Kammerton ($a^1,\ 440\ Hz$).
- Man teilt jede Oktave in 12 Halbtöne und jeden Halbton in 100 Cent. Intervalllänge im Centmaß: $1200 \cdot \log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)\ Cent$
- Oktaven werden nummeriert, Halbtöne im Oktavabstand haben denselben Namen ($c, cis,$ ...). Beispiel: $dis^2 + 23\ Cent$
- Die Einheit Cent ist dimensionslos. 0 Cent = Prime, 100 Cent = Halbton, 1200 Cent = Oktave. Negative Cent: Abwärtsintervalle.
- Die hier definierten Halbtöne sind gleichstufig gestimmt: Quinte = 700 Cent, reine Quinte ≈ 702 Cent

Hörwahrnehmung: Tonhöhe

Hörwahrnehmung: Tonhöhe

- Die wahrgenommene Frequenz hängt auch von der Frequenz ab, daher verwendet man die empirische Einheit mel (Tonheit).



2. Was ist ein Ton?

- In der **Musik**: Ein Ton hat Laustärke, Tonhöhe, Klangfarbe.
- In der **Physik** (Akustik): Ein Ton ist eine harmonische Schwingung des Schalldrucks in einem Medium. Sie breitet sich als laufende Welle $p(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$ mit $c = \frac{\omega}{k}$ aus.
- Die Amplitude A wird als Lautstärke, die Frequenz f als Tonhöhe *logarithmisch* wahrgenommen.

- Der physikalische Ton hat keine Klangfarbe. Von Instrumenten erzeugte Töne sind physikalisch Klänge.

Musikalische Töne