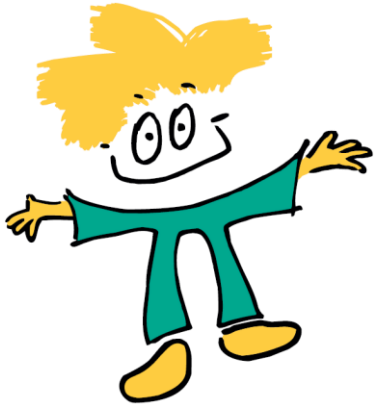
Karlsruher Institut für Technologie



Vorlesung 5

Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

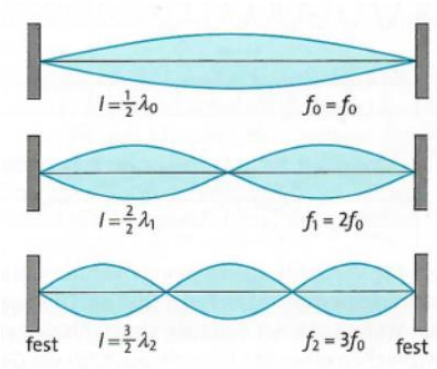
04. Juli 2025

Schnupperkurs 2025 Mathematik und Musik

Zusammenfassung

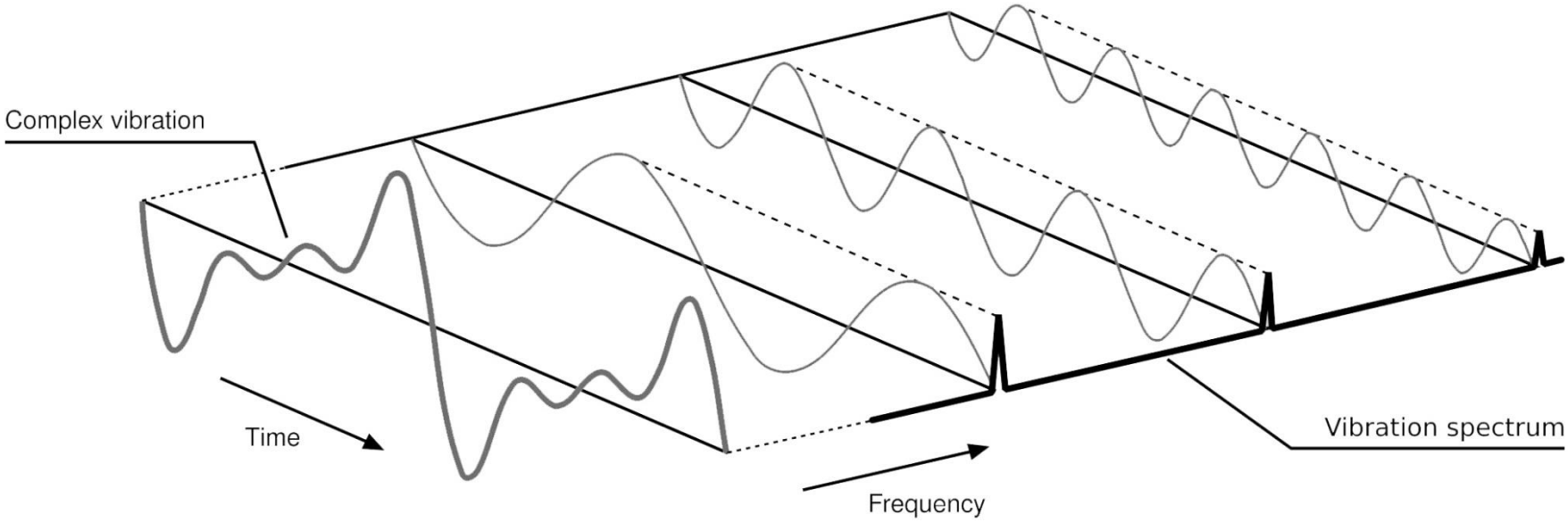
- Physikalische (ideale) Töne sind harmonische Schwingungen $y(t) = A\sin(2\pi f t)$ mit Amplitude (Lautstärke) A und Frequenz (Tonhöhe) f.
- Musikalische (reale) Töne sind physikalische Klänge, also komplexere periodische Schwingungen.
- Sie entstehen durch Überlagerung einer Grundschwingung f_0 mit ihren Oberschwingungen $f_n = (n+1)f_0$ und werden mathematisch durch Fourierreihen beschrieben:

$$y(t) = A_1 \sin(2\pi f_0 t) + A_2 \sin(2\pi\, 2 f_0 t) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi n f_0 t)$$



Zusammenfassung

$$y(t) = A_1 \sin(2\pi f_0 t) + A_2 \sin(2\pi\, 2 f_0 t) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi n f_0 t)$$



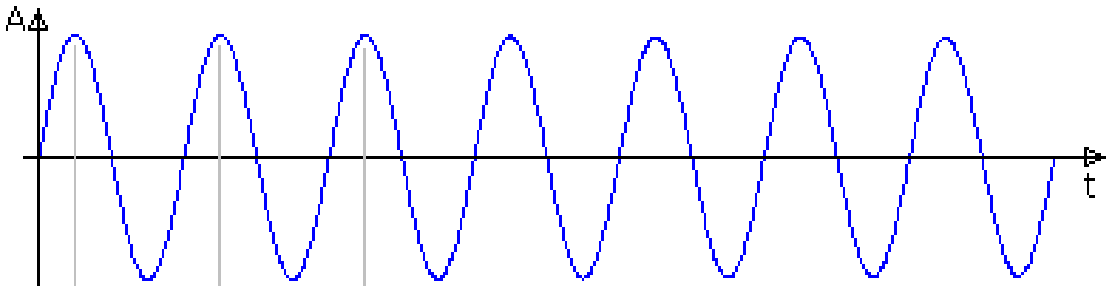
Zusammenfassung

$$y(t) = A_1 \sin(2\pi f_0 t) + A_2 \sin(2\pi\, 2 f_0 t) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

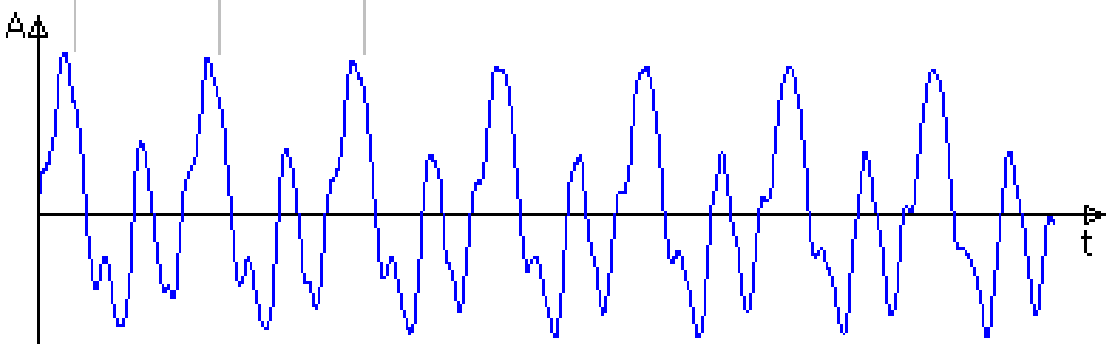
- Fourieranalyse: Zerlegung eines Klangs in Töne. Die Amplituden (Fourierkoeffizienten) A_n bestimmen die Klangfarbe.
- Fouriersynthese: Erzeugung eines Klangs aus gegebenen A_n. Das ist mathematisch diffizil, denn die Fourierreihe konvergiert nicht immer (punktweise) und der Klang lässt sich nicht immer rekonstruieren.

- In der Naturtonreihe $f_0, 2f_0, 3f_0, 4f_0, \ldots$ treten die reinen Intervalle Oktave (1:2), Quinte (2:3), Quarte (3:4), große Terz (4:5) u.s.w. in natürlicher Weise auf. (Und damit auch ein Dur-Akkord)

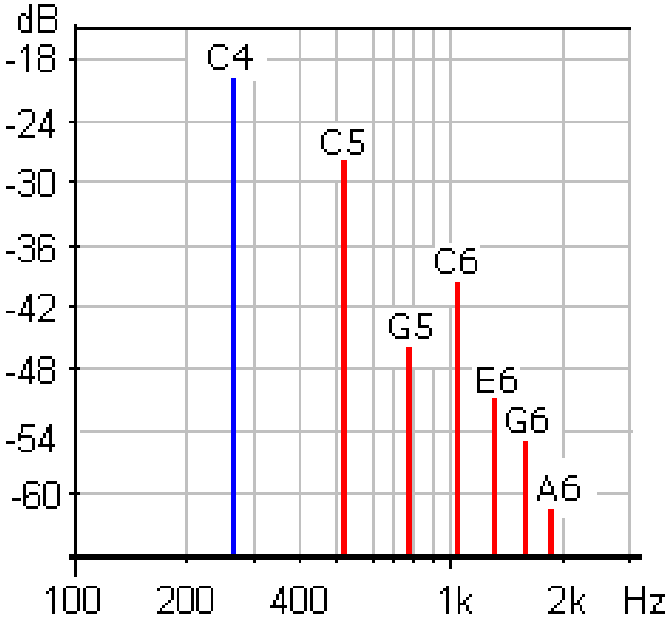
Naturtonreihe



C4 = 261,625 Hz als reinen Sinuston



C4 als Klavierton (Tonaufnahme)



C4 261,625 Hz

C5 523,251 Hz	E6 1318,510 Hz
G5 783,991 Hz	G6 1567,982 Hz
C6 1046,502 Hz	A6 1760,000 Hz

7. Intervalle

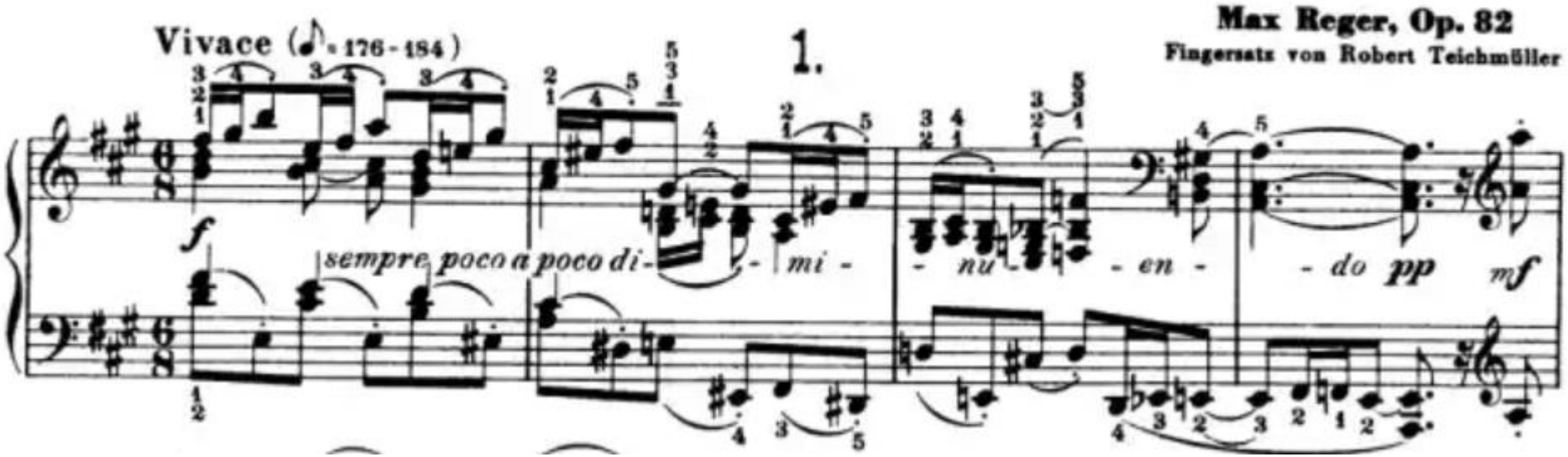
Musik

besteht aus **Harmonien**

bestehen aus **Intervallen**

bestehen aus **Tönen**

Was ist ein Intervall?



7. Intervalle

- Ein Intervall ist der Abstand zweier Töne/ Tonhöhen.
- Das Frequenz<u>verhältnis</u> bestimmt unsere Hörwahrnehmung: Die Intervalle [100 Hz, 150 Hz] und [440 Hz, 660 Hz] klingen „gleich“.
- Die Intervalle 1:2, 1:3, 1:4, …, 2:3, 2:5, 2:7, …, 3:4, 3:5, 3:7, … sind durch die Naturtonreihe ausgezeichnet.

1) Wie klingt ein Intervall?
2) Wie groß ist ein Intervall? / Wie kann man Intervalle messen?
3) Wie verhalten sich Intervalle zueinander? / Was passiert bei der Addition von Intervallen?

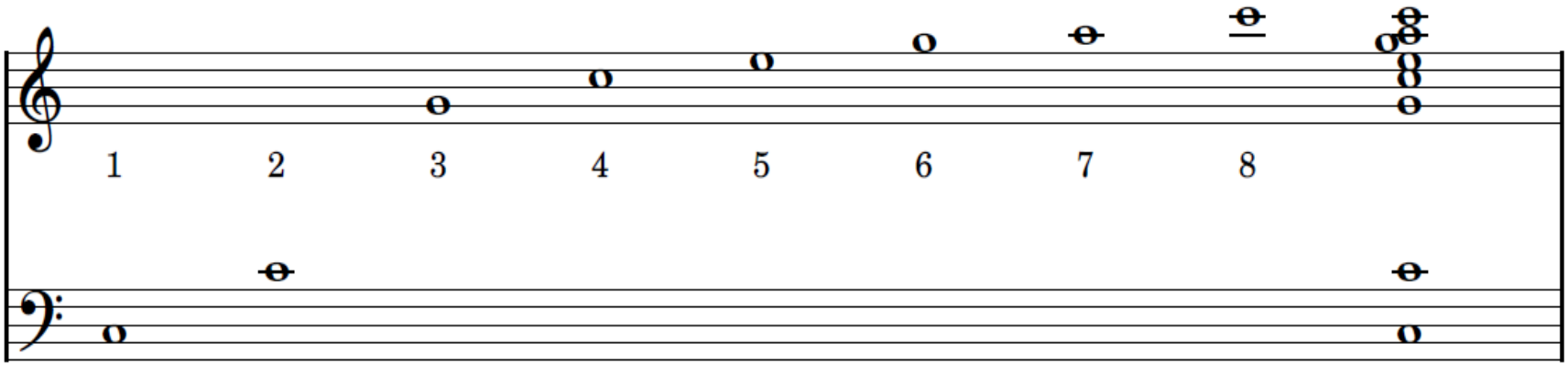
1) Wie klingt ein Intervall?

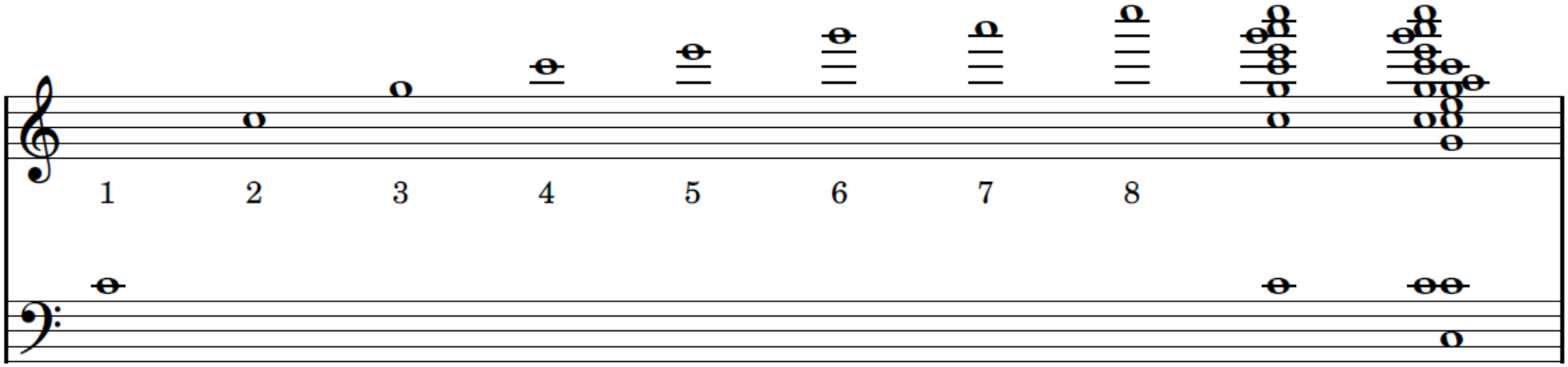
- Schon Pythagoras erkannte: Wenn sich das Frequenzverhältnis mit kleinen Zahlen ausdrücken lässt, klingt das Intervall „gut“ (konsonant), bei großen Zahlen „schlecht“ (dissonant).
- Denn: Bei konsonanten Intervallen tritt ein Ton (hörbar) in der Naturtonreihe des anderen auf.

Beispiel:

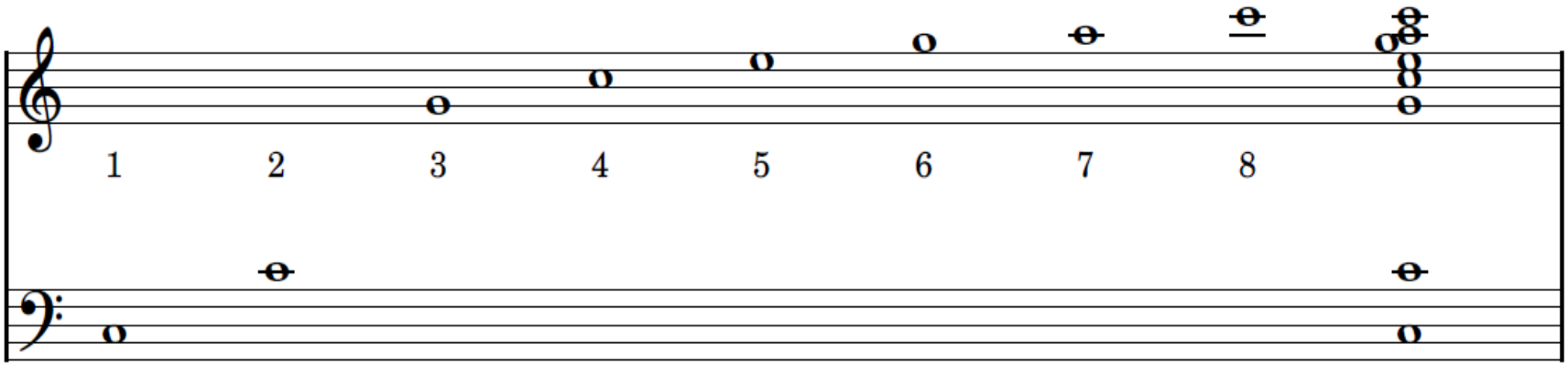
Grundton	c		c^1	g^1	c^2		e^2	g^2	a^2		c^3	…
Oktave			c^1		c^2			g^2			c^3	…
Quinte		g		g^1		d^2		g^2		h^2		…

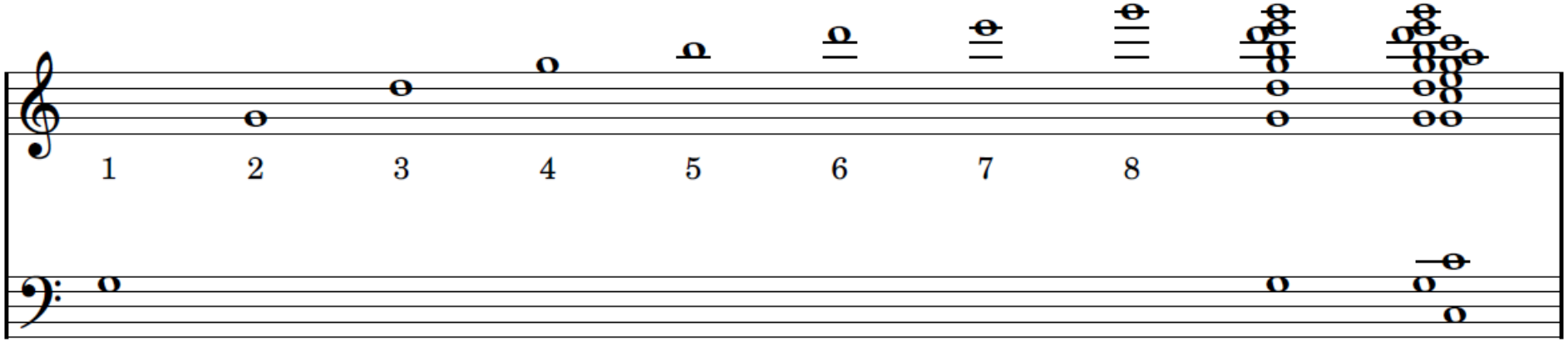
1) Wie klingt ein Intervall?





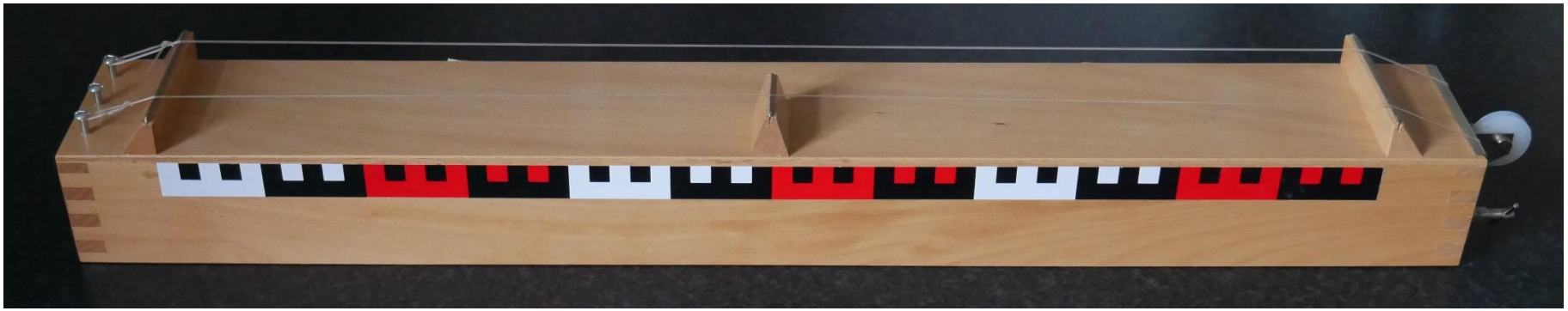
1) Wie klingt ein Intervall?





Monochord

- Pythagoras experimentierte am Monochord, einer an beiden Enden eingespannten Saite.
- Wir wissen: Für die Grundfrequenz gilt $f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2L}$ mit $c = \sqrt{\frac{F}{m}}$, die Tonhöhe hängt also von der Saitenlänge L, der Spannkraft F und der Masse m der Saite ab.
- Frequenz und Saitenlänge sind antiproportional.

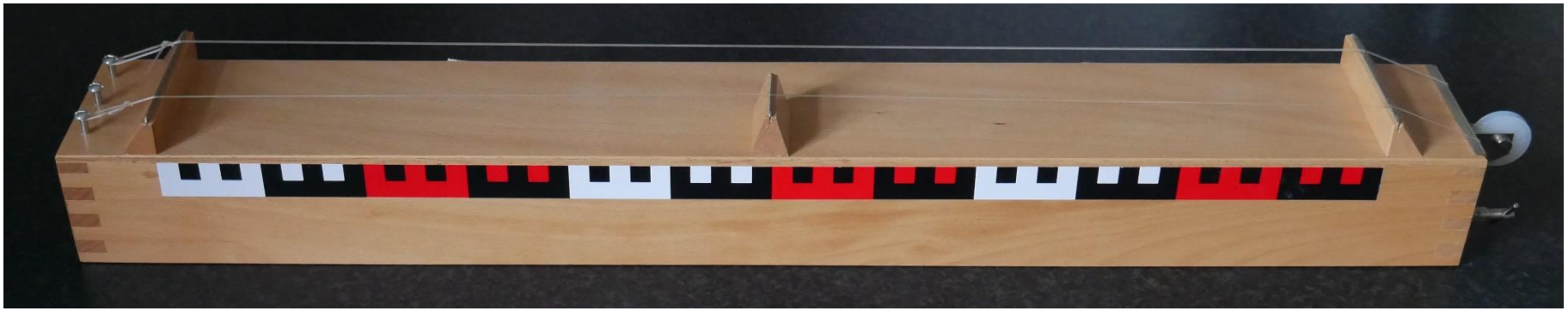


Monochord

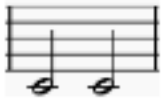
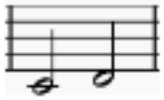
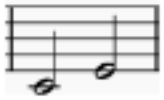
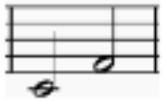
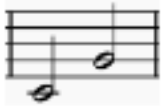
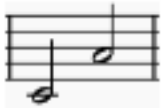
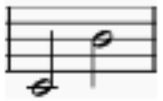
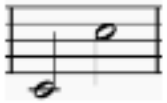
- Intervalle mit einfachen Frequenz-/ Saitenlängenverhältnissen heißen reine Intervalle und bekommen spezielle Namen.
- Die musikalischen Addition von Intervallen (Hörwahrnehmung) entspricht der Multiplikation der Frequenzverhältnisse.

Beispiel: $1:3 = (1:2) \cdot (2:3) =$ Oktave + Quinte.

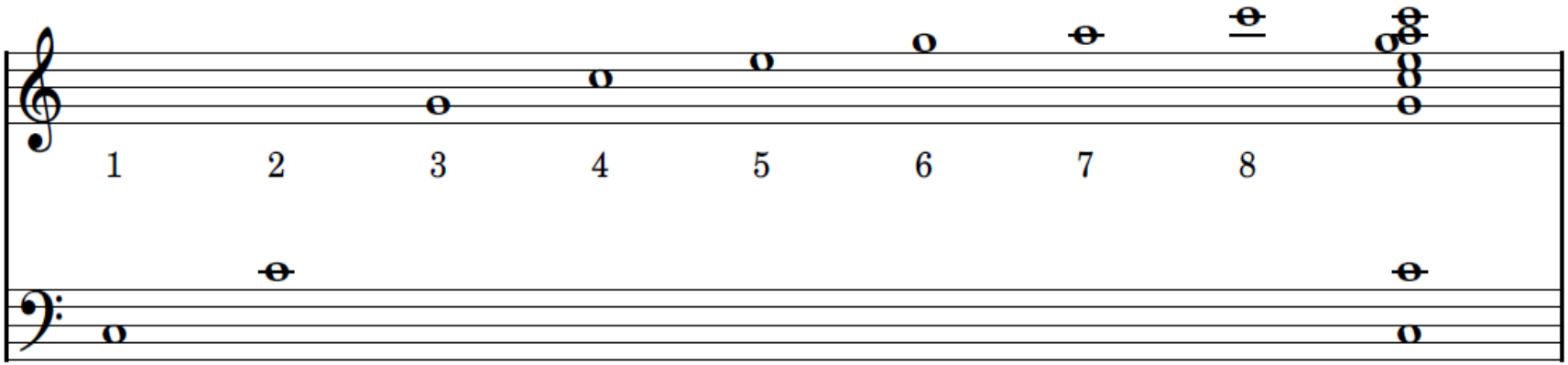
- Wir können uns durch Oktavieren also auf die Verhältnisse zwischen 1:1 (Prime) und 1:2 (Oktave) beschränken.

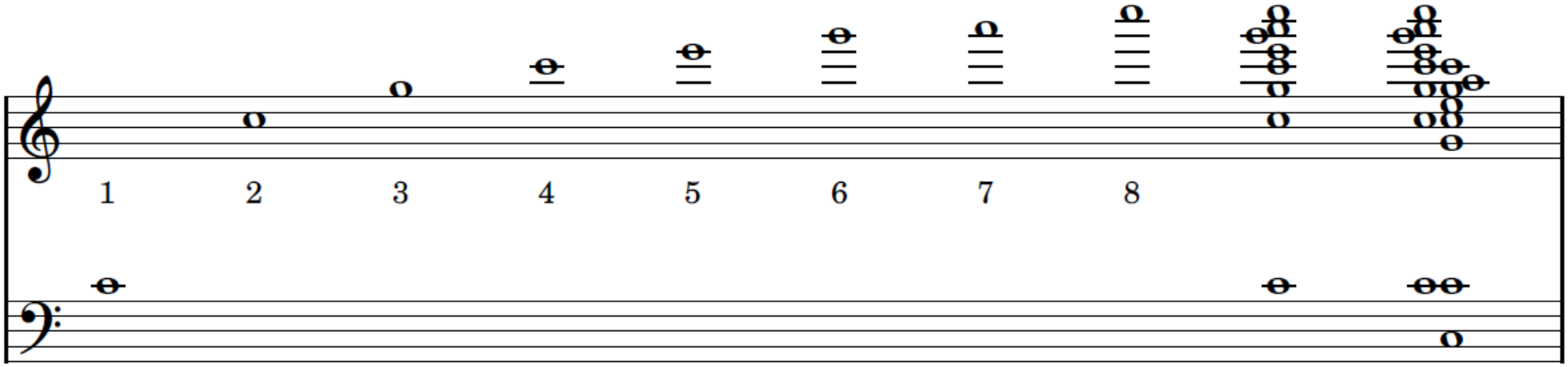


Reine Intervalle

Intervall	Frequenzverhältnis	Beispiel
Prime	$\frac{1}{1}$	
Große Sekunde	$\frac{9}{8}$	
Große Terz	$\frac{5}{4}$	
Quarte	$\frac{4}{3}$	
Quinte	$\frac{3}{2}$	
Große Sexte	$\frac{5}{3}$	
Große Septime	$\frac{15}{8}$	
Oktave	$\frac{2}{1}$	

Reine Intervalle





2) Wie kann man Intervalle messen?

- Der musikalische Ton (a^1) ist eine logarithmische Skala von f: Eine Oktave höher entspricht einer Verdopplung der Frequenz.

Intervalllänge = $\log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)$ Oktaven. *Beispiel:* $\log_2(2:1) = 1$ Oktave.

- Man teilt die Oktave in 12 Halbtöne und jeden Halbton in 100 Cent.

Intervalllänge = $12 \cdot \log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)$ Halbtöne = $1200 \cdot \log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)$ Cent

- 0 Cent = Prime, 100 Cent = Halbton, 1200 Cent = Oktave. Negative Cent: Abwärtsintervalle.

Warum?

2) Wie kann man Intervalle messen?

- Der musikalische Ton (a^1) ist eine logarithmische Skala von f: Eine Oktave höher entspricht einer Verdopplung der Frequenz.

Intervalllänge = $\log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)$ Oktaven. *Beispiel:* $\log_2(2:1) = 1$ Oktave.

- Man teilt die Oktave in 12 Halbtöne und jeden Halbton in 100 Cent.

Intervalllänge = $12 \cdot \log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)$ Halbtöne = $1200 \cdot \log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)$ Cent

- 0 Cent = Prime, 100 Cent = Halbton, 1200 Cent = Oktave. Negative Cent: Abwärtsintervalle.
- Wegen $\log_2(q_1 \cdot q_2) = \log_2(q_1) + \log_2(q_2)$ kann man Centmaße wie Intervalle addieren.

Beispiel: Quinte + Quarte

7 + 5 Halbtöne = 700 + 500 Cent = 1200 Cent = 1 Oktave.

Gleichstufige Stimmung

- Die so festgelegten Halbtöne sind gleichstufig gestimmt: Das Frequenzverhältnis des Halbtons ist immer $2^{\frac{100}{1200}} = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$.
- Das Frequenzverhältnis der gleichstufigen Quinte (700 Cent) ist also $2^{\frac{700}{1200}} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \approx 1{,}498 \neq 3:2$.
- Die reine Quinte ist $1200 \cdot \log_2(3:2) \approx 701{,}96$ Cent groß.
- Alle Intervalle außer der Oktave sind in reiner und gleichstufiger Stimmung verschieden groß, d.h. die gleichstufige Stimmung enthält fast keine reinen Intervalle.

Beispiel: Quinte + Quarte

7+5 Halbtöne = 700+500 Cent = 1200 Cent = 1 Oktave (gleichstufig)

Frequenzverhältnisse $(2:3) \cdot (3:4) = (1:2)$ (rein)

Gleichstufige Stimmung

- Die reine Stimmung ist physikalisch natürlich und „wohlklingend“.
- Wir intonieren automatisch rein beim Singen, beim Stimmen, bei Blasinstrumenten u.s.w.
- Die gleichstufige Stimmung ist heutzutage gebräuchlich, weil alle Tonarten gleich klingen.
- Das vereinfacht Transposition und Modulation. Klaviere sind oft gleichstufig gestimmt.
- Das Centmaß ist ein praktisches Maß für die Größe eines Intervalls (im Vergleich zur gleichstufigen Stimmung).

3) Was passiert bei der Addition von Intervallen?

- Die Addition gleichstufiger Intervalle ergibt stets wieder ein gleichstufiges Intervall, d.h. die gleichstufige Stimmung erzeugt ein geschlossenes Tonsystem. **Warum?**
- Wir haben uns dabei auf 12 gleich große Halbtöne festgelegt.

Kann man auch mit reinen Intervallen geschlossene Tonsysteme erzeugen?

- Die Addition von n Oktaven (Oktavieren) ergibt alle namens-gleichen Töne mit Frequenzverhältnis $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Ausgehend von einem Kammerton (z.B. c) kann man anhand der Naturtonreihe stimmen: $c, c^1, g^1, c^2, e^2, g^2, a^2, c^3, \ldots$
- In dieser **reinen Stimmung** gibt es nur eine Harmonie, Transposition ist nicht möglich. (Naturhorn, Flageolett)
- Oktavieren der Obertöne entspricht Oktavieren des Kammertons.

Pythagoreische Stimmung

- Wir können nun die Naturtöne über dem zweiten Oberton g^1 oder (einfacher) reine Quinten hinzunehmen.
- Die Addition von m (reinen) Quinten ergibt neue Intervalle mit Frequenzverhältnis $\left(\frac{2}{3}\right)^m$.
- Die Addition von n Oktaven (Oktavieren) ergibt alle namens-gleichen Töne mit Frequenzverhältnis $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Ausgehend von einem Kammerton (z.B. c) entstehen so immer neue Töne $c, c^1, c^2, \ldots, g, g^1, g^2, \ldots, d^1, d^2, d^3, \ldots$
  Das ist die **pythagoreische Stimmung**.

Endet dieser Prozess irgendwann?

Pythagoreische Stimmung

- Wenn m (reine) Quinten so groß sind wie n Oktaven, so gilt

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

oder äquivalent $2^{m+n} = 3^m$.

- Diese Gleichung hat keine ganzzahlige Lösung außer $m = n = 0$.
- Anders ausgedrückt: Die Zahl

$$\frac{m+n}{m} = \log_2(3) \approx 1{,}585$$

ist irrational.

- Es gibt also kein geschlossenes Tonsystem mit reinen Oktaven und reinen Quinten. In der pythagoreischen Stimmung entstehen theoretisch unendlich viele verschiedene Töne.

In der Praxis ist aber ein endlicher Tonvorrat sinnvoll.

Pythagoreische Stimmung

- Man akzeptiert einen „Fehler“ und sucht nach einer Näherung der Lösung $\log_2(3)$ durch rationale Zahlen $\frac{m+n}{m}$.
- Der Nenner m soll möglichst klein sein, da er die Anzahl der Töne (pro Oktave) im so konstruierten Tonsystem angibt.
- Die optimale solche Näherung erhält man durch Kettenbruchentwicklung:

$$\log_2(3) = 1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_3}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_4}}} = [1,1,1,2,2,3,1,\dots]$$

Kettenbruchentwicklung

- Sei $x_1 > 0$ gegeben und $g_1 := [x_1]$ das größte Ganze von x_1 („Abrunden“). Dann ist $0 \leq x_1 - g_1 < 1$.
- Ist $x_1 - g_1 = 0$, so ist $x_1 = g_1 = [x_1]$ ganzzahlig.
- Andernfalls sei $x_1 = g_1 + \frac{1}{x_2}$, definiere also $x_2 := \frac{1}{x_1 - g_1} > 1$ und betrachte $0 \leq x_2 - g_2 < 1$ für $g_2 := [x_2]$.
- So fortfahrend definieren wir $x_n = g_n + \frac{1}{x_{n+1}}$ mit $g_n := [x_n]$, solange x_n nicht ganzzahlig ist.
- Damit haben wir die Kettenbruchentwicklung (KBE)

$$x_1 = g_1 + \frac{1}{x_2} = g_1 + \frac{1}{g_2 + \frac{1}{x_3}} = \cdots = [g_1, g_2, \dots, g_n, x_{n+1}].$$

- Die rationale Zahl $[g_1, \dots, g_n] = \frac{p_n}{q_n}$ ist ein Näherungsbruch für x_1.

Kettenbruchentwicklung

- Ist irgendwann x_n ganzzahlig, so ist die KBE abbrechend und x_1 ist rational.
- Mithilfe des Euklidischen Algorithmus‘ zeigt man umgekehrt, dass rationale Zahlen eine abbrechende KBE haben.
- Genau die irrationalen Zahlen haben also eine nicht abbrechende KBE: Für jede Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist

$$x = \lim_{n\to\infty} [g_1, \dots, g_n].$$

- Man kann zeigen, dass die KBE einer irrationalen Zahl x genau dann periodisch ist, wenn $x = s \pm \sqrt{r}$ mit rationalen Zahlen s, r.
- Zum Beispiel ist

$$\frac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = [1,1,1,2], \qquad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}} = [1,2,2,\dots]$$

Kettenbruchentwicklung

- Für die Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n} = [g_1, \dots, g_n]$ gelten die Rekursionsformeln $p_n = g_n p_{n-1} + p_{n-2}$ mit $p_1 = g_1, p_0 = 1$ sowie
  $q_n = g_n q_{n-1} + q_{n-2}$ mit $q_1 = 1, q_0 = 0$ für $n \geq 2$.
- Daraus folgt die Gleichung $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^{n+1}$, insbesondere sind die Brüche $\frac{p_n}{q_n}$ gekürzt.
- Wir beweisen nun folgenden **Satz**: Eine beliebige Zahl x_1 habe die KBE $x_1 = [g_1, \dots, g_{k-1}, x_k]$. Gibt es ganze Zahlen p, q mit

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|,$$

so gilt $q > q_n$.

- Die KBE liefert also einen gekürzten Näherungsbruch, der unter den Brüchen mit Nenner $\leq q_n$ die optimale Näherung ist.

Pythagoreisches Komma

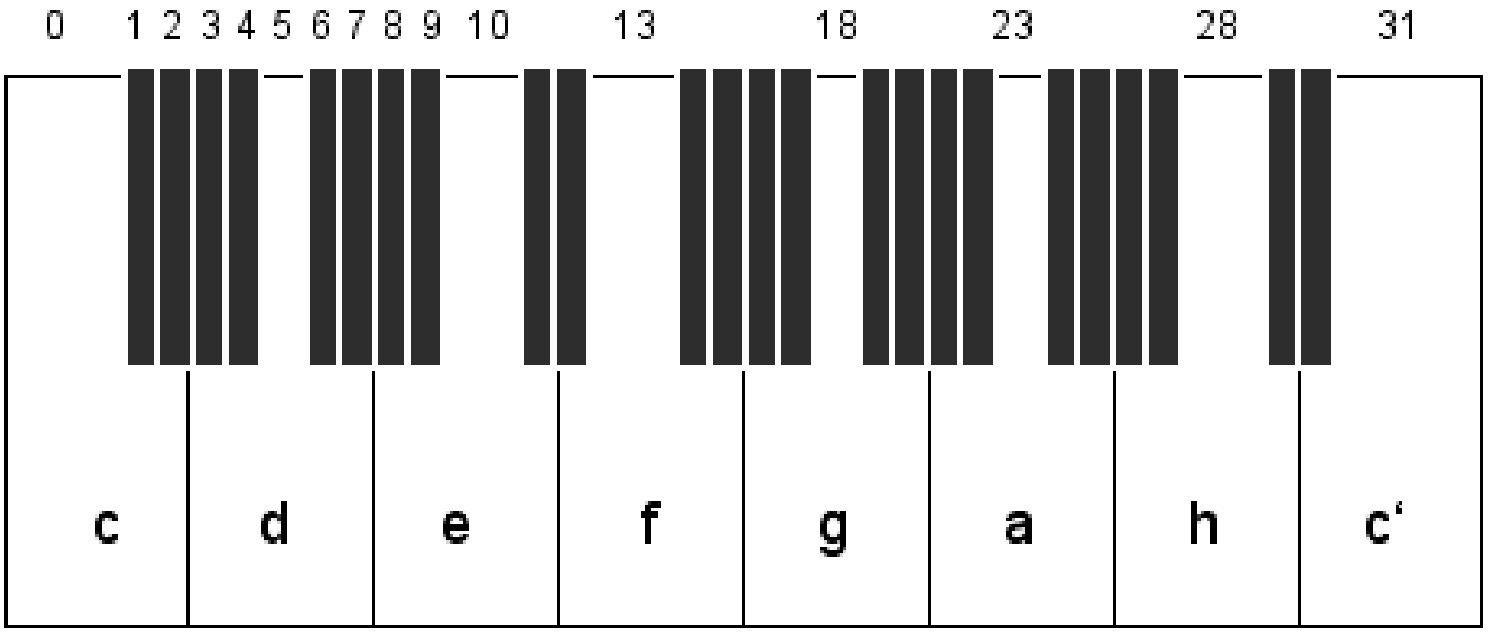
- Wir berechnen nun mit der KBE optimale rationale Näherungen der Lösung $\frac{m+n}{m} = \log_2(3) \approx 1{,}585$:

$$\log_2(3) = 1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_3}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_4}}} = [1,1,1,2,2,3,1,\dots]$$

m (Quinten)	n (Oktaven)	$\frac{m+n}{m}$	Fehler
1	0	$\frac{1}{1}$	≈ 0.58496
1	1	$\frac{2}{1}$	≈ 0.41504
2	1	$\frac{3}{2}$	≈ 0.08496
5	3	$\frac{8}{5}$	≈ 0.01504
12	7	$\frac{19}{12}$	≈ 0.00163
41	24	$\frac{65}{41}$	≈ 0.00040
53	31	$\frac{84}{53}$	≈ 0.00006

Pythagoreisches Komma

- Je genauer man approximiert, desto kleiner wird der Fehler und desto mehr verschiedene Töne pro Oktave gibt es.
- Im europäischen Tonsystem hat sich 12 Quinten ≈ 7 Oktaven durchgesetzt. Die Differenz zwischen 12 (reinen) Quinten und 7 Oktaven heißt das pythagoreische Komma (PK).



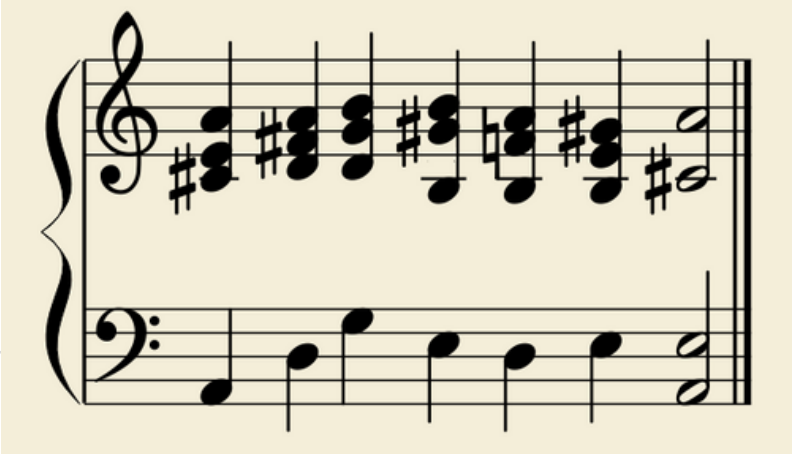
Pythagoreisches Komma

- Je genauer man approximiert, desto kleiner wird der Fehler und desto mehr verschiedene Töne pro Oktave gibt es.
- Im europäischen Tonsystem hat sich 12 Quinten $\approx$ 7 Oktaven durchgesetzt. Die Differenz zwischen 12 (reinen) Quinten und 7 Oktaven heißt das pythagoreische Komma (PK).
- Es hat das Frequenzverhältnis $(3:2)^{12} \cdot (1:2)^{7} = \frac{531441}{524288}$, das entspricht $23{,}46$ Cent ($\approx$ Achtelton).
- Es gibt verschiedene Wege, das PK in der Oktave zu verteilen oder zu vermeiden. (Temperation)
- Stimmt man 11 reine Quinten, so ist die letzte Quinte um das PK zu klein (Wolfsquinte).
- Verteilt man das PK gleichmäßig über alle 12 Halbtöne, so entsteht die gleichstufige Stimmung.

Syntonisches Komma

- Neben reinen Quinten (dritter Oberton) sind auch reine große Terzen (fünfter Oberton) wichtig.
- Vier reine Quinten entsprechen reoktaviert $(3:2)^4 \cdot (1:2)^2 = \frac{81}{64}$, also in etwa einer großen Terz $\frac{5}{4}$.
  Die Differenz heißt das syntonische Komma (SK).
- Es hat das Frequenzverhältnis $\frac{81}{80}$, das entspricht $21{,}51$ Cent.
- Das SK tritt z.B. bei Modulationen in reiner Stimmung auf („Kommafalle“), weil dasselbe Tonbild in verschiedenen Tonarten verschiedene Töne bezeichnet.

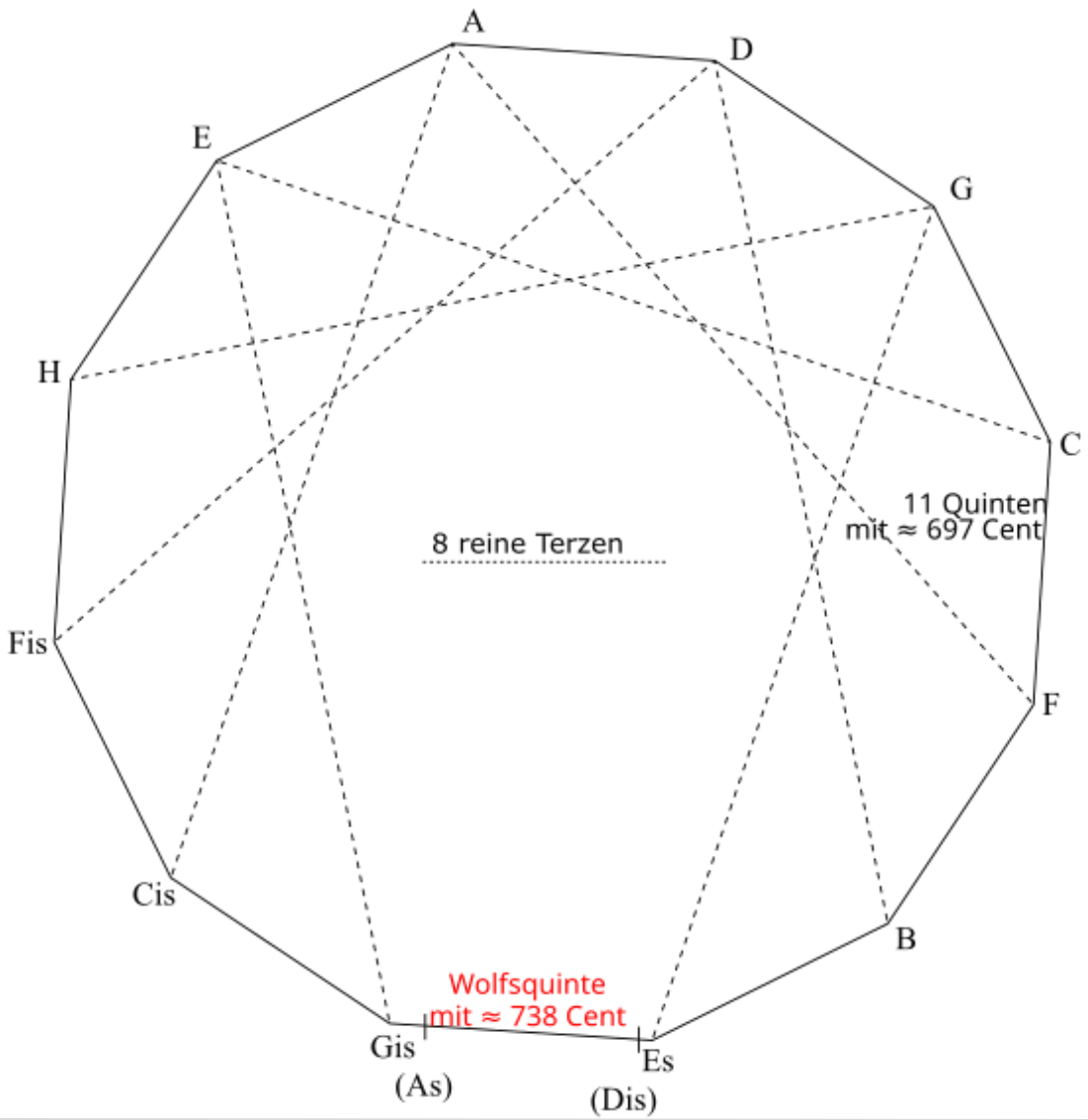
Beispiel: In der großen Terz g-h liegt der Ton h ein SK unter dem Ton h in der (reinen) Quinte e-h.



Mitteltönige Stimmung

- In der pythagoreischen Stimmung entstehen keine reinen großen Terzen (4 Quinten = 2 Oktaven + große Terz + SK).
- Verringert man die reinen Quinten um ein Viertel des SK (ca. $696{,}6$ Cent), so erhält man eine reine große Terz.
- Stimmt man auf diese Weise 11 Quinten, so erhält man 8 reine große Terzen.
- Die letzte Quinte ist zu groß ($\frac{11}{4}$ SK – PK $\approx 35{,}7$ Cent) und daher eine Wolfsquinte.
- Im Ergebnis enthalten Tonarten mit wenigen Vorzeichen mehr „brauchbare“ Intervalle. Solche mitteltönigen Stimmungen waren in der frühen Barockzeit üblich.

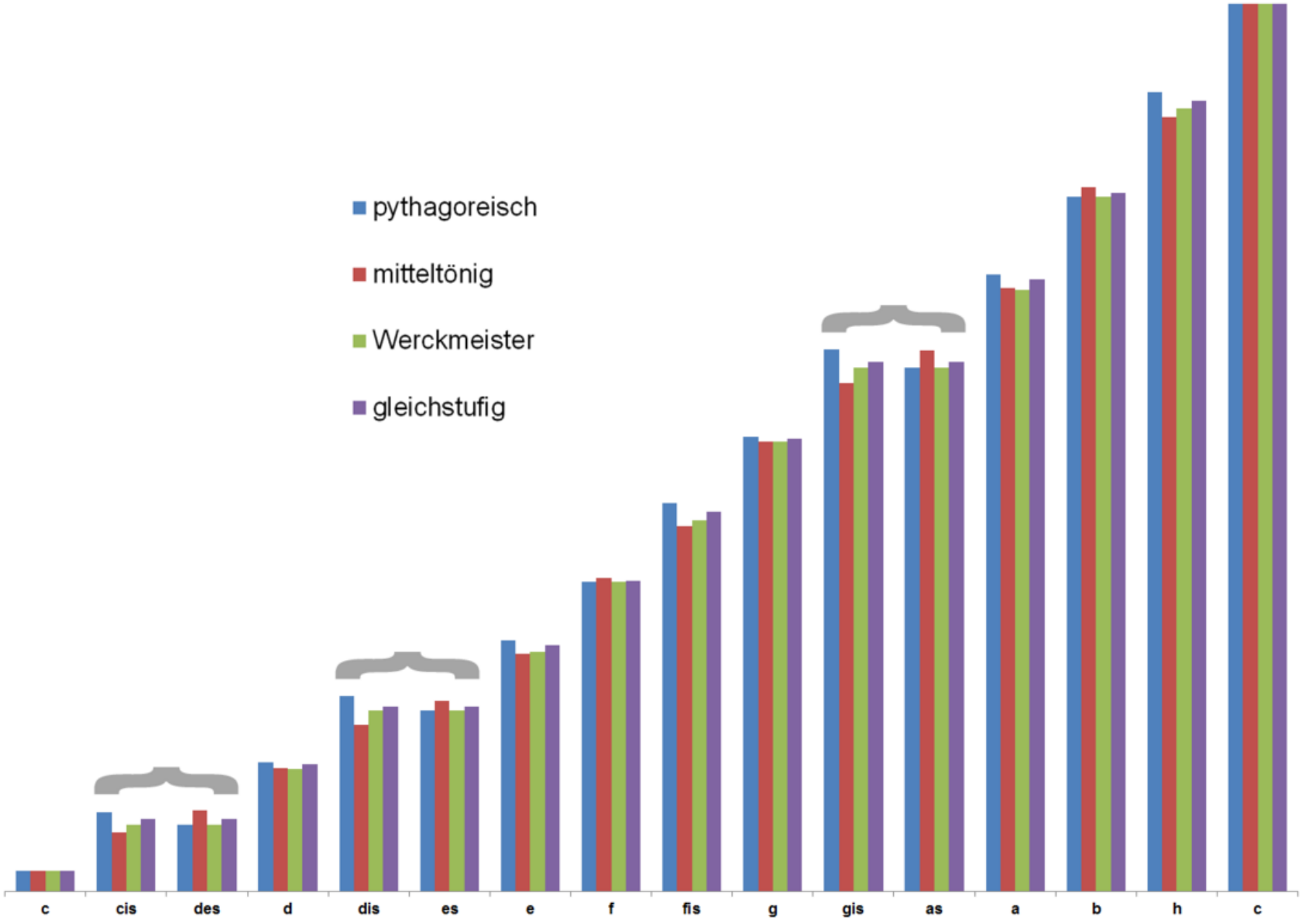
Mitteltönige Stimmung



Temperation

- In der späten Barockzeit wurden (vor allem für die Orgel) zahlreiche wohltemperierte Stimmungen entwickelt, die
  - alle Tonarten spielbar und enharmonische Verwechslungen möglich machen und zugleich
  - die verschiedenen „Charaktere“ der Tonarten bewahren wollten.
- Die bekanntesten Beispiele sind Werckmeister III bis VI sowie die gleichstufige Stimmung.

Außereuropäische oder moderne Tonsysteme

- wählen weniger als zwölf Töne pro Oktave (Pentatonik, Slendro),
- wählen mehr als zwölf Töne pro Oktave (Mikrotonalität),
- verzichten auf reine Quinten/ große Terzen oder sogar Oktaven.

Temperation