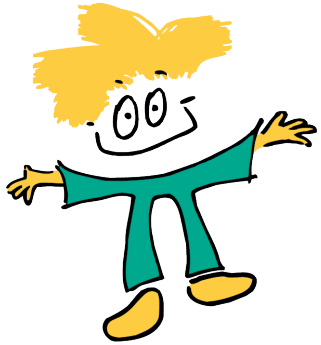
Karlsruher Institut für Technologie



Vorlesung 4

Kim Burgstahler, Wolf Wechinger
28. Mai 2025

SCHNUPPERKURS 2025 MATHEMATIK UND MUSIK

Definition

(1) Zu einer (integrierbaren) Funktion $f : [-\pi, \pi]$ definieren wir

die **Fourierkoeffizienten** $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x$ für $n = 0, 1, \ldots,$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \text{ für } n = 1, 2, \ldots,$$

die **Fourierreihe** $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$

$$s_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

s_N ist die N-te **Partialsumme** der Fourierreihe von f.

(2) Sind a_n, b_n irgendwelche Zahlen, so heißt eine Funktion der Form s_N ein **trigonometrisches Polynom** vom Grad N.

Ein Vektor $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ hat nach dem Satz des Pythagoras die **Länge** $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Definiert man das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

so gilt $\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$ und daher die Gleichung

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Ein Vergleich mit dem Kosinussatz im Dreieck $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}$ zeigt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \gamma,$$

wobei $\gamma \in [0, \pi]$ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene **Winkel** ist. Es ist also $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ genau dann, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ **senkrecht** aufeinander stehen; und in diesem Fall gilt

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2.$$

Man kann diese Überlegungen auf andere Situationen übertragen: Immer wenn man ein Skalarprodukt hat, kann man damit Längen und Winkel messen.

Es sei $L^2[-\pi,\pi]$ der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, also aller Funktionen $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, für die $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x < \infty$ existiert.
Für zwei Funktionen $f, g \in L^2[-\pi,\pi]$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dann gelten die Grundeigenschaften

$$\begin{aligned} \langle f_1 + f_2, g\rangle &= \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle, & \langle f, g_1 + g_2\rangle &= \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle, \\ \langle \lambda f, g\rangle &= \langle f, \lambda g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle, & \langle f, g\rangle &= \langle g, f\rangle. \end{aligned}$$

Zwei Funktionen $f, g \in L^2[-\pi,\pi]$ heißen **orthogonal**, falls $\langle f, g\rangle = 0$. Unter der „Länge“ einer Funktion verstehen wir die **Norm**

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen $f(x)^2 \geqslant 0$ ist stets $\langle f, f\rangle \geqslant 0$.

Wie im $\mathbb{R}^2$ folgt nun zum Beispiel $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$,

die **Dreiecksungleichung**	$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$,
die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**	$\lvert\langle f,g\rangle\rvert \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$,
der **Satz des Pythagoras**	$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$, falls $\langle f,g\rangle = 0$.

Die Orthogonalitätsrelationen bedeuten gerade, dass die Funktionen

$$f_0(x) = 1, \qquad f_{2n-1}(x) = \cos(nx), \qquad f_{2n}(x) = \sin(nx)$$

paarweise orthogonal sind, also ein *Orthogonalsystem* in $L^2[-\pi,\pi]$ bilden. Dividieren wir noch durch ihre Länge $\|f_0\| = \sqrt{2\pi}$, $\|f_{2n-1}\| = \|f_{2n}\| = \sqrt{\pi}$, so haben

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad e_{2n-1}(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \qquad e_{2n}(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$$

zusätzlich Länge 1, bilden also ein *Orthonormalsystem* in $L^2[-\pi,\pi]$.

Für die Fourierkoeffizienten haben wir nun die Darstellungen $a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\langle f, e_0\rangle$,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle f, e_{2n-1}\rangle, \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle f, e_{2n}\rangle$$

und daher für die Fourierreihe und ihre Partialsummen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, e_n\rangle e_n, \qquad s_N = \sum_{n=0}^{2N}\langle f, e_n\rangle e_n.$$

Genauso lässt sich jedes trigonometrische Polynom t vom Grad N als Linearkombination der $e_0, \ldots, e_{2N}$ schreiben, d.h. $t = \sum_{n=0}^{2N} c_n e_n$ für $c_n = \langle t, e_n\rangle$.
Aus dem Satz des Pythagoras folgt die wichtige Gleichung

$$\|s_N\|^2 = \sum_{n=0}^{2N} \|\langle f, e_n\rangle e_n\|^2 = \sum_{n=0}^{2N}\langle f, e_n\rangle^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right).$$

Satz

Sei $f \in L^2[-\pi, \pi]$, a_n, b_n die Fourierkoeffizienten und s_N die N-te Partialsumme der Fourierreihe von f.

(1) s_N ist unter allen trigonometrischen Polynomen vom Grad N die eindeutige Bestapproximation an f in $L^2[-\pi, \pi]$, d.h. für jedes solche Polynom t gilt

$$\|f - s_N\| \leqslant \|f - t\|$$

und $f - s_N$ ist orthogonal zu t.

(2) Es gelten die **Besselsche Gleichung** und die **Besselsche Ungleichung**

$$\|f - s_N\|^2 = \|f\|^2 - \|s_N\|^2,$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\|f\|^2.$$

BEWEIS Wir verwenden das Orthonormalsystem $e_0, e_1, \ldots$ und berechnen mit den Eigenschaften des Skalarproduktes zunächst

$$\begin{aligned}\langle f - s_N, t\rangle &= \sum_{n=0}^{2N} c_n \langle f - \sum_{k=0}^{2N} \langle f, e_k\rangle e_k, e_n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{2N} c_n \langle f, e_n\rangle - \sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{2N} c_n \langle f, e_k\rangle\langle e_k, e_n\rangle = 0.\end{aligned}$$

Aus dem Satz des Pythagoras folgt nun

$$\|f\|^2 = \|(f - s_N) + s_N\|^2 = \|f - s_N\|^2 + \|s_N\|^2 \geqslant \|s_N\|^2,$$

also $\|s_N\| \leqslant \|f\|$ und mit $N \to \infty$ die Besselsche Ungleichung. Da auch $s_N - t$ ein trigonometrisches Polynom vom Grad N ist, erhalten wir genauso wie eben

$$\|f - t\|^2 = \|(f - s_N) + (s_N - t)\|^2 = \|f - s_N\|^2 + \|s_N - t\|^2.$$

Dieser Ausdruck wird genau für $t = s_N$ minimal, daher ist $\|f - t\| \geqslant \|f - s_N\|$ und s_N die eindeutige Bestapproximation an f. $\square$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ konvergiert also, und das kann nur gelten, wenn auch die Reihenglieder $a_n^2 + b_n^2$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren. Daraus folgt für die Fourierkoeffizienten $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Skalieren wir diese Aussage von $[-\pi, \pi]$ auf Funktionen über einem beliebigen Intervall $[a, b]$ um, so erhalten wir folgenden wichtigen Satz:

Folgerung: Satz von Riemann-Lebesgue

Sei $f \in L^2[a, b]$, also f quadratisch integrierbar über $[a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \to 0, \qquad \int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Beispiel: Für die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(\pi) = -1$ und

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$$

haben wir zuvor schon die Fourierreihe $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ berechnet. Da offenbar $f \in L^2[-\pi, \pi]$ mit $\|f\|^2 = 2\pi$, folgt aus der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n-1)} \right)^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \|f\|^2 = 2, \text{ also}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots \leqslant \frac{\pi^2}{8}.$$

Wir werden später mit der Parsevalschen Gleichung sehen, dass diese Ungleichung tatsächlich eine *Gleichung* ist.

Wegen der Besselschen Ungleichung $\|s_N\| \leqslant \|f\|$ konvergieren die Partialsummen s_N in $L^2[-\pi,\pi]$, d.h. es gibt eine Funktion $s \in L^2[-\pi,\pi]$, sodass

$$\|s_N - s\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (s_N(x) - s(x))^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ (N \to \infty).$$

Diese *Vollständigkeit* von $L^2[-\pi,\pi]$ verwenden wir hier *ohne Beweis*.

Wir wollen nun $s = f$ zeigen, dass also stets die Fourierreihe von f in $L^2[-\pi,\pi]$ gegen f konvergiert. Nach Satzteil (1) ist $f - s$ orthogonal auf jedem trigonometrischen Polynom. Daraus folgern wir nun $f - s = 0$, also $s = f$:

Satz

Sei $f \in L^2[-\pi,\pi]$ eine Funktion, die zu allen e_n orthogonal ist, d.h. $\langle f, e_n \rangle = 0$. Dann ist $f = 0$ fast überall.

Der BEWEIS beruht auf dem Approximationssatz von Weierstraß: Jede stetige Funktion mit $f(-\pi) = f(\pi)$ kann (gleichmäßig) durch trigonometrische Polynome approximiert werden. Könnten wir f so approximieren, so ergäbe sich aus der Voraussetzung $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ sofort $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 = 0$, also $f = 0$.
Leider ist im Allgemeinen weder f stetig noch $f(-\pi) = f(\pi)$.

Wir umgehen dieses Problem, indem wir die Integralfunktion $F(x) := \int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ betrachten: Für jede Konstante C ist $F - C$ stetig uns es gilt

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\langle f, e_0\rangle = 0 = F(-\pi).$$

Können wir also die Orthogonalitätsbedingung $\langle F - C, e_n\rangle = 0$ zeigen, so folgt aus dem Approximationssatz von Weierstraß $F - C = 0$, also $F = C$. Dann ist wie behauptet $f = 0$ fast überall.

Damit $0 = \langle F - C, e_0 \rangle = \langle F, e_0 \rangle - \sqrt{2\pi} C \langle e_0, e_0 \rangle = \langle F, e_0 \rangle - \sqrt{2\pi} C$ gilt, muss $C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x$ gewählt werden. Für $n = 1, 2, \ldots$ gilt mit partieller Integration

$$0 = \langle f, e_n \rangle = [F(x) e_n(x)]_{-\pi}^{\pi} - \langle F, e_n' \rangle = -\langle F, e_n' \rangle,$$

beachte $F(-\pi) = F(\pi) = 0$. Wegen $e_{2n-1}' = -n e_{2n}$ und $e_{2n}' = n e_{2n-1}$ folgt daraus für $n = 1, 2, \ldots$ zunächst $\langle F, e_n \rangle = 0$ und dann wie gewünscht

$$\langle F - C, e_n \rangle = \langle F, e_n \rangle - \sqrt{2\pi} C \langle e_0, e_n \rangle = 0. \ \square$$

Bemerkung: Die obige Rechnung zeigt ganz allgemein: Ist $f(-\pi) = f(\pi)$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f'

$$\langle f', e_{2n-1} \rangle = n \langle f, e_{2n} \rangle, \qquad \langle f', e_{2n} \rangle = -n \langle f, e_{2n-1} \rangle$$

und $\langle f', e_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x)]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

Folgerung

Sei $f \in L^2[-\pi, \pi]$ eine quadratintegrierbare Funktion.
(1) Dann konvergiert die Fourierreihe von f in $L^2[-\pi, \pi]$ gegen f:

$$\|f - s_N\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\to 0 \ (N \to \infty).$$

(2) Es gilt die **Parsevalsche Gleichung**

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

BEWEIS (1) haben wir soeben gezeigt.
(2) Aus (1) und der Besselschen Gleichung folgt $\|s_N\| \to \|f\|$ für $N \to \infty$. $\square$

Wir wissen nun, dass jede Funktion aus $L^2[-\pi,\pi]$ *im quadratischen Mittel* durch ihre Fourierreihe dargestellt wird. Das sagt allerdings noch nichts darüber aus, an welchen Stellen $x \in [-\pi,\pi]$ dies gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Es gibt zahlreiche Kriterien für die *punktweise* Konvergenz der Fourierreihe, wir werden einige Beispiele kennenlernen.

Ist die Fouriersynthese eindeutig? „Nein, nur fast“ in $L^2[-\pi,\pi]$: Haben zwei Funktionen $f, g \in L^2[-\pi,\pi]$ dieselben Fourierkoeffizienten, so stimmen sie fast überall überein. Aber „Ja“ für stetige Funktionen:

Satz (ohne Beweis)

Seien $f, g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.
Haben f und g dieselben Fourierkoeffizienten, so folgt $f = g$.

Satz

(1) Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ stetig und für die Fourierkoeffizienten gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty. \tag{A}$$

Dann konvergiert die Fourierreihe (gleichmäßig) gegen f, es gilt also

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

an jeder Stelle $x \in [-\pi, \pi]$; insbesondere ist $f(-\pi) = f(\pi)$.
(2) Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(-\pi) = f(\pi)$.
Dann ist die Voraussetzung (A) erfüllt.

BEWEIS (1) Mit $|\cos(nx)| \leqslant 1$ und $|\sin(nx)| \leqslant 1$ erhalten wir für alle $x \in [-\pi, \pi]$

$$|s_N(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{2N} |\langle f, e_n\rangle e_n| = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{N} |a_n \cos(nx)| + |b_n \sin(nx)|$$
$$\leqslant \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=1}^{N} |b_n|.$$

Wegen (A) konvergiert der letzte Ausdruck, nach dem Kriterium von Weierstraß konvergiert s_N (gleichmäßig) gegen eine stetige Funktion g mit $g(-\pi) = g(\pi)$. Da auch f stetig ist und dieselben Fourierkoeffizienten wie g hat, folgt $f = g$.
(2) Wie zuvor ist wegen $f(-\pi) = f(\pi)$ die Fourierreihe von f' gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{2N} \langle f', e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{N} n\left(\langle f, e_{2n}\rangle e_{2n-1} - \langle f, e_{2n-1}\rangle e_{2n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{N} n\left(b_n \cos(nx) - a_n \sin(nx)\right).$$

Die Fourierreihe der Ableitung f' ist also die Ableitung der Fourierreihe von f. Nach der Besselschen Ungleichung konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)$. (*)
Wir verwenden nun die elementare Ungleichung $|a_n| + |b_n| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und dann die Höldersche Ungleichung (Übung)

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |c_n d_n|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} c_n^2\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} d_n^2\right),$$

um zu berechnen:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=1}^{N} |b_n| \leqslant \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqslant \sqrt{2} \left(\sum_{n=1}^{N} n^2(a_n^2 + b_n^2)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da die beiden rechten Reihen konvergieren, konvergieren auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, d.h. (A) ist erfüllt. $\square$

Bemerkung: An der Stelle (*) erkennt man $na_n \to 0$, $nb_n \to 0$ für $n \to \infty$ wie beim Satz von Riemann-Lebesgue.

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist stetig differenzierbar mit $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2$, nach dem soeben bewiesenen Satz konvergiert also die Fourierreihe von f an jeder Stelle $x \in [-\pi, \pi]$ gegen $f(x)$. f ist gerade, daher ist $b_n = 0$ und wir berechnen

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) \,\mathrm{d}x = -\frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{n^2\pi} \left[x \cos(nx)\right]_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi \cos(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{4}{n^2}(-1)^n \text{ für } n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Damit haben wir für $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ die Darstellung

$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2} = x^2, \text{ also} \\
&\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2} = -\cos x + \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(3x)}{9} + - \ldots = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}
$$

Setzt man hierin $x = 0$, so ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + - \ldots = \frac{\pi^2}{12},$$

aus $x = -\pi$ oder $x = \pi$ erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Durch Addition beider Formeln finden wir wieder das Ergebnis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ und damit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Aus der Parsevalschen Gleichung ergibt sich wegen $\|f\|^2 = \frac{2\pi^5}{5}$ zuletzt

$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{2\pi^4}{5}, \text{ also} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Es folgen noch einige Resultate über die punktweise Konvergenz der Fourierreihe:

Satz (ohne Beweis)

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$.
(1) **Satz von Dirichlet**: Ist f differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$.
(2) Ist f stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe (punktweise) gegen das arithmetische Mittel der links- und rechtsseitigen Grenzwerte

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \text{ wobei } \qquad f(x\pm) := \lim_{t \to x\pm} f(t). \qquad (*)$$

Beachte: In den Stetigkeitsstellen von f ist dieser Mittelwert gleich $f(x)$.
(3) **Satz von Fejér**: Konvergiert die Fourierreihe an einer Stelle x und existiert dort der Mittelwert (*), so ist er der Wert der Fourierreihe.

Bemerkung: Diese Kriterien können verbessert werden. Es gibt jedoch stetige Funktionen, bei denen die Fourierreihe an einzelnen Stellen nicht konvergiert.

Wir haben schon gesehen, dass für $f(-\pi) = f(\pi)$ die Fourierreihe der Ableitung f' gerade die Ableitung der Fourierreihe von f ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(b_n \cos(nx) - a_n \sin(nx)\right).$$

Aus den vorherigen Resultaten können wir daher folgern:

Folgerung

Sei $f : [-\pi, \pi]$ stückweise stetig differenzierbar und $f(-\pi) = f(\pi)$.
(1) Konvergiert die Fourierreihe von f' an einer Stelle x, so konvergiert sie dort gegen das arithmetische Mittel

$$\frac{f'(x+) + f'(x-)}{2}.$$

(2) Ist f zweimal differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe von f' (punktweise) gegen $f'(x)$.

Beispiel: Wir haben soeben die Fourierreihe der Funktion $f(x) = x^2$ berechnet:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Ableiten ergibt die Fourierreihe

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Aus der Fourieranalysis ergeben sich nicht nur Reihenwerte, sondern auch ganz erstaunliche Beziehungen wie die *Produktdarstellung des Sinus'*

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zum BEWEIS beginnen damit, für eine nichtganze Zahl $t \notin \mathbb{Z}$ die Fourierreihe der Funktion $f(x) = \cos(tx)$ zu berechnen: f ist gerade und daher $b_n = 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(tx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n-t)x + \cos(n+t)x\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin(n-t)\pi}{\pi(n-t)} + \frac{\sin(n+t)\pi}{\pi(n+t)} = \frac{((n-t)-(n+t))\,(-1)^n\sin(t\pi)}{\pi(n^2-t^2)} \\ &= \frac{2t(-1)^n\sin(t\pi)}{\pi(t^2-n^2)}, \end{aligned}$$

beachte $\sin(n\pi + t\pi) = (-1)^n \sin(t\pi)$. Wegen obigem Satz konvergiert die Fourierreihe von f überall gegen $f(x)$, es ist also für $x \in [-\pi, \pi]$

$$\cos(tx) = \frac{\sin(t\pi)}{t\pi} + \frac{2t\sin(t\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{t^2-n^2}.$$

Setzt man $x = \pi$, so ergibt sich daraus die *Partialbruchzerlegung des Kotangens*

$$\pi \cot(\pi t) = \frac{\pi \cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2}$$

für alle $t \notin \mathbb{Z}$. Mit scharfem Auge erkennt man in den Reihengliedern die Form $\frac{2t}{t^2-n^2} = \frac{f'(t)}{f(t)}$ einer logarithmischen Ableitung. Wir berechnen daher

$$\frac{\left(\pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right)'}{\pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{x} + \frac{\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right)'}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)'}{1 - \frac{x^2}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \pi \cot(\pi x) = \frac{(\sin(\pi x))'}{\sin(\pi x)}.$$

Dies kann nur erfüllt sein, wenn es eine Konstante C gibt, sodass $\sin(\pi x) = C\pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ ist – eine Gleichung, die auch für $x \in \mathbb{Z}$ gilt.

Wir erhalten also jetzt für alle $x \neq 0$

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Für $x \to 0$ ist die linke Seite ein Differentialquotient der Funktion $g(x) = \sin(\pi x)$:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi x) - \sin(\pi 0)}{x - 0} \to \frac{1}{\pi}(\sin(\pi x))'(0) = \cos(0) = 1 \ (x \to 0).$$

Auf der rechten Seite ergibt sich für $x \to 0$ offenbar C, sodass $C = 1$ und damit die behauptete Produktdarstellung bewiesen ist. $\square$

Aus ihr folgt mit $x = \frac{1}{2}$ die *Wallissche Produktformel*

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n-1}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots$$