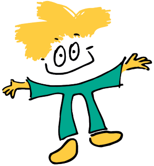

Vorlesung 3

Kim Burgstahler, Wolf Wechinger
21. Mai 2025

SCHNUPPERKURS 2025 MATHEMATIK UND MUSIK

5. Wellengleichung

Wir haben schon festgestellt, dass laufende Wellen $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$ die **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{\omega}{k} > 0$ erfüllen.
Dasselbe gilt für stehende Wellen $y(x,t) = A\sin(\omega t)\cos(kx)$, die zum Beispiel als Eigenschwingungen einer schwingenden Saite auftreten.

Wir wollen nun begründen, dass die Wellengleichung die *Bewegungsgleichung* der schwingenden Saite ist, also all ihre physikalisch möglichen Zustände beschreibt. Indem wir die Wellengleichung untersuchen, können wir dann mehr über die Physik der schwingenden Saite lernen.

Modell der schwingenden Saite

Wir betrachten eine Saite mit konstanter (Längen-)Dichte ϱ, die zwischen $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist. Wir stellen uns die Saite bestehend aus N Massepunkten der Masse ϱh an den Stellen $x_n = \frac{n}{N} L = nh$ vor.

Schwingt die Saite, so erfährt jeder Massepunkt eine (vertikale) Auslenkung $y_n(t) = y(x_n, t)$, die mit der Zeit t variiert. Dadurch wirkt auf ihn eine Rückstellkraft; wir treffen die Annahme, dass diese Kraft in symmetrischer Weise nur von den nächsten Nachbarn abhängt und proportional zum vertikalen Abstand $y_{n+1} - y_n$ bzw. $y_{n-1} - y_n$ ist (wie bei einer elastischen Feder). Mit der Spannung $\tau > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \varrho h \ddot{y}_n &= \frac{\tau}{h}(y_{n+1} - y_n) + \frac{\tau}{h}(y_{n-1} - y_n) \\ \varrho \ddot{y}(x_n, t) &= \tau \left(\frac{y(x_n + h, t) + y(x_n - h, t) - 2y(x_n, t)}{h^2} \right). \end{aligned}$$

Modell der schwingenden Saite

Für $N \to \infty$ konvergiert $h \to 0$ und damit die rechte Seite der Gleichung gegen $\tau y''(x,t)$. Mit $c^2 = \frac{\tau}{\varrho}$ ist also die Auslenkung $y(x,t)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\ddot{y} = c^2 y''.$$

Wir beobachten noch, dass wir die Koordinaten (x,t) geeignet skalieren können: Wählt man $X = \frac{\pi}{L}x$ und $T = \frac{c\pi}{L}t$, so ist die Wellengleichung für $y(x,t)$ äquivalent zur Wellengleichung $\ddot{Y} = Y''$ für

$$Y(X,T) = y(x,t) = y\left(\frac{L}{\pi}X, \frac{L}{c\pi}T\right).$$

Wir können also o.B.d.A. $c = 1$ und $L = \pi$ annehmen.

Wellengleichung

Um alle physikalischen Zustände der schwingenden Saite zu finden, suchen wir nun allgemein nach allen Funktionen $y(x, t)$, die die (homogene) Wellengleichung lösen:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{W}$$

Zusätzlich soll $y(x, t)$ Anfangsbedingungen erfüllen, die den Zustand der Saite bei $t = 0$ beschreiben:

$$y(x, 0) = g(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = h(x). \tag{A}$$

Wir orientieren uns bei der Lösung von (W) zunächst an laufenden Wellen $y(x, t) = \sin(\omega t - kx)$, später an stehenden Wellen $y(x, t) = \sin(\omega t) \cos(kx)$.

Laufende Wellen

Wir machen folgende Beobachtung: Für jede zweimal differenzierbare Funktion F sind $y(x,t) = F(x - ct)$ und $y(x,t) = F(x + ct)$ zwei Lösungen von (W). Da (W) linear ist, ist dann auch $y(x,t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ eine Lösung von (W).

Sei umgekehrt $y(x,t)$ eine Lösung von (W). Skaliere die Koordinaten $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ und setze

$$z(\xi, \eta) := y(x,t) = y\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2c}(\xi - \eta)\right),$$

dann ist (W) für $y(x,t)$ äquivalent zu $\partial_\xi \partial_\eta z(\xi, \eta) = 0$.

Integriert man diese Gleichung zweimal (nach ξ und nach η), so ergibt sich

$$y(x,t) = z(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

mit gewissen Funktionen F und G. Alle Lösungen $y(x,t)$ von (W) sind also von dieser Form.

Laufende Wellen

$y(x,t)$ erfülle nun zusätzlich zu (W) die Anfangsbedingungen (A), dann gilt

$$g(x) = F(x) + G(x), \qquad h(x) = cF'(x) - cG'(x)$$

und daher $2F'(x) = g'(x) + \frac{1}{c}h(x)$ und $2G'(x) = g'(x) - \frac{1}{c}h(x)$. Integriert man beide Gleichungen, so erhält man

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) + \int_0^x h(y)\frac{\mathrm{d}y}{c}\right) + C_1, \quad G(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) - \int_0^x h(y)\frac{\mathrm{d}y}{c}\right) + C_2$$

mit gewissen Konstanten C_1, C_2. Aus der Bedingung $g(x) = F(x) + G(x)$ folgt $C_1 + C_2 = 0$ und wir erhalten für die Lösung $y(x,t)$ die **Formel von d'Alembert**

$$\begin{aligned} y(x,t) &= F(x+ct) + G(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Laufende Wellen

Wir haben nun die Wellengleichung (W) mit den Anfangsbedingungen (A) allgemein gelöst. Für das Modell der schwingenden Saite ist es sinnvoll, zusätzlich folgende Randbedingungen zu fordern:

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0. \tag{R}$$

Dann müssen die Anfangsbedingungen notwendig $g(0) = g(\pi) = 0$ und $h(0) = h(\pi) = 0$ erfüllen. Mit der Formel von d'Alembert kann nun die Lösung $y(x, t)$, also der zeitliche und räumliche Verlauf der schwingenden Saite, berechnet werden.

Wir lösen nun nochmal (W) unter der Randbedingung (R), aber zunächst ohne die Anfangsbedingung (A); wir suchen also nach Eigenschwingungen der eingespannten Saite. Analog zu stehenden Wellen machen wir einen **Separationsansatz**, suchen also nach Lösungen von (W) in der Form $y(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$.

Stehende Wellen

Ist $y(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ eine solche Lösung, so folgt aus (W) sofort $\varphi\ddot{\psi} = c^2\varphi''\psi$, für $\psi(t) \neq 0$ und $\varphi(x) \neq 0$ also

$$\frac{\ddot{\psi}(t)}{\psi(t)} = c^2\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Da die linke Seite nur von der Zeit t, die rechte Seite nur vom Ort x abhängt, müssen beide Seiten gleich einer Konstanten λc^2 sein. ψ und φ sind also Lösungen der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\ddot{\psi} - \lambda c^2\psi = 0, \qquad \varphi'' - \lambda\varphi = 0.$$

Aus den Randbedingungen (R) folgt $\varphi(0)\psi(t) = \varphi(\pi)\psi(t) = 0$, für $y \neq 0$ bedeutet das $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Wir suchen also nach (nichttrivialen) Lösungen des Randwertproblems

$$\varphi'' - \lambda\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \tag{*}$$

Stehende Wellen

Für eine nichttriviale Lösung von (*) ist auch die Ableitung φ' nichttrivial und daher

$$\lambda \int_0^\pi \varphi(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \varphi(x)\varphi''(x) = [\varphi(x)\varphi'(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi'(x)^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^\pi \varphi'(x)^2 \,\mathrm{d}x < 0.$$

Es folgt $\lambda < 0$ und wir können λ in der Form $\lambda = -n^2$ mit einer Zahl $n > 0$ schreiben. *Übung:* Alle Lösungen der Differentialgleichung $\varphi'' + n^2\varphi = 0$ sind gegeben durch

$$\varphi(x) = A\sin(nx) + B\cos(nx)$$

mit Konstanten A und B.
Wegen $\varphi(0) = 0$ ist $B = 0$ und aus $\varphi(\pi) = 0$ folgt die Gleichung $A\sin(n\pi) = 0$.
Für $y \neq 0$ ist $\sin(n\pi) = 0$ und daher n eine natürliche Zahl.

Stehende Wellen

Zusammengefasst: Das Randwertproblem (*) hat nur für $-\lambda = n^2, n = 1, 2, \ldots$ eine nichttriviale Lösung, nämlich $\varphi(x) = A\sin(nx)$ mit einer Konstanten A.

Alle Lösungen von $\ddot{\psi} - \lambda c^2 \psi = 0$ sind daher gegeben durch

$$\psi(t) = \tilde{A}\sin(cnt) + \tilde{B}\cos(cnt)$$

mit Konstanten $\tilde{A}, \tilde{B}$. Wir haben damit alle Lösungen der Wellengleichung (W) unter der Randbedingung (R) gefunden:

$$y_n(x,t) = \varphi(x)\psi(t) = \sin(nx)\left(A_n\sin(cnt) + B_n\cos(cnt)\right)$$

für $n = 1, 2, \ldots$ und beliebige Konstanten A_n, B_n.

$y_n(x,t)$ beschreibt eine stehende Welle: Beispielsweise ist $y(x,t) = \cos(2ct)\sin(2x)$ eine erste Oberschwingung mit einem Knoten bei $x = \frac{\pi}{2}$. Insbesondere sind alle Lösungen $y_n(x,t)$ periodische Funktionen in x und in t.

Stehende Wellen

Wir wollen nun die stehende Welle $y_n(x, t)$ den Anfangsbedingungen (A) unterziehen, also eine anfängliche Auslenkung $g(x)$ und Geschwindigkeit $h(x)$ vorgeben. Dazu machen wir folgende Beobachtung: Da die Wellengleichung (W) und die Randbedingungen (R) linear sind, ist auch die Summe zweier stehender Wellen wieder eine Lösung, also auch die (unendliche) Reihe

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \left(A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)\right)$$

für jede Wahl der Konstanten A_n, B_n (**Superpositionsprinzip**). Damit $y(x, t)$ die Anfangsbedingungen (A) erfüllen kann, muss notwendig

$$g(x) = y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx), \qquad h(x) = \dot{y}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} cnB_n \sin(nx)$$

für gewisse Konstanten A_n, B_n gelten, die Funktionen g und h müssen also ganz ähnliche Darstellungen wie $y(x, t)$ als eine *Sinusreihe* haben.

Fourierreihen

Gibt es eine solche Darstellung (immer)?
Insbesondere sind dann g und h ungerade Funktionen; eine naheliegende Frage ist daher auch, ob sich eine gerade Funktion $\tilde{g}$ als *Kosinusreihe* darstellen lässt:

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n \cos(nx) = \tilde{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \cos(nx).$$

Da sich jede Funktion in einen geraden und einen ungeraden Teil zerlegen lässt (Übung), können wir auch allgemein fragen, ob sich eine beliebige Funktion f in eine trigonometrische Reihe entwickeln lässt:

$$f(x) = \tilde{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \cos(nx) + \tilde{B}_n \sin(nx).$$

Eine solche Reihe heißt eine **Fourierreihe**, die Zahlen $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n$ die **Fourierkoeffizienten** von f.

Fourierreihen

Wir machen folgende Beobachtung: Wenn sich g als Sinusreihe schreiben lässt, so können wir die A_n berechnen durch

$$\int_0^\pi g(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = A_m \cdot \frac{\pi}{2},$$

denn es gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } n = m. \end{cases}$$

Dies folgt mit partieller Integration aus den Gleichungen

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{n^2}{m^2}\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^\pi \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1-\cos(2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Gezupfte Saite

Beispiel: Eine Saite werde bei $x = p$ bis zur Höhe h gezupft und dann losgelassen, wir lösen also die Wellengleichung mit den Anfangsbedingungen

$$g(x) = \begin{cases} \frac{hx}{p}, & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant p, \\ \frac{h(\pi - x)}{\pi - p}, & \text{für } p \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

und $h(x) = 0$. Für die Fourierkoeffizienten von g berechnet man

$$\frac{\pi}{2} \cdot A_n = \int_0^\pi g(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{h}{p} \int_0^p x \sin(nx) \, \mathrm{d}x + \frac{h}{\pi - p} \int_p^\pi (\pi - x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x$$

$$= \dots = \frac{h}{n^2} \sin(np) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\pi - p} \right) = \frac{h\pi}{n^2(\pi - p)} \sin(np),$$

also $A_n = \frac{2h}{n^2(\pi - p)} \sin(np)$. Daraus ergibt sich die Lösung

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^\infty A_n \sin(nx) \cos(cnt) = \frac{2h}{\pi - p} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(np)}{n^2} \sin(nx) \cos(cnt).$$

Gezupfte Saite

Bemerkung 1: Aufgrund der Additionstheoreme ist

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left(\sin(n(x+ct)) + \sin(n(x-ct)) \right) = \frac{1}{2} \left(g(x+ct) + g(x-ct) \right),$$

wir kommen also zu derselben Lösung wie mit der Formel von d'Alembert.

Bemerkung 2: Für $p = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin(np) = 0$ für gerade n, es fehlt also die zweite, vierte,... Oberton. Für $p = \frac{\pi}{3}$ fehlt entsprechend der dritte, sechste,... Oberton.

Bemerkung 3: Da g an der Stelle $x = p$ einen Knick hat, ist weder g noch y differenzierbar, die Funktion $y(x,t)$ also nur eine „schwache Lösung" der Wellengleichung.

6. Fourieranalysis

Sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, die eine Darstellung als **Fourierreihe** besitzt, zum Beispiel ein musikalischer Ton oder eine allgemeine Lösung der Wellengleichung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Dann ist sicherlich f eine 2π-periodische Funktion, also durch das Intervall $(-\pi, \pi]$ vollständig bestimmt. Wir können die Fourierkoeffizienten einer gegebenen Funktion f berechnen mithilfe der **Orthogonalitätsrelationen** (Übung)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m, \\ \pi, & \text{falls } n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ für alle } n = 1, 2, \ldots \text{ und } m = 0, 1, \ldots$$

Wegen $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ ist zunächst

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot \frac{a_0}{2} = a_0\pi, \text{ also } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für $m = 1, 2, \ldots$ folgt aus den Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = a_m\pi, \text{ also } a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = b_m\pi, \text{ also } b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x.$$

Die Fourierkoeffizienten a_n, b_n einer Funktion f können also aus f eindeutig berechnet werden. (*Fourieranalyse*)

Umgekehrt können verschiedene Funktionen dieselben Fourierkoeffizienten haben, d.h. nicht jede Funktion kann als Fourierreihe dargestellt werden (*Fouriersynthese*). Es ist sogar möglich, dass die Fourierreihe nicht konvergiert.

Bemerkung 1: Ist f gerade, vereinfachen sich die Fourierkoeffizienten zu $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x$$

und die Fourierreihe ist eine *Kosinusreihe*. Ist f ungerade, so ergibt sich entsprechend eine *Sinusreihe* mit $a_n = 0$ und

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x.$$

Bemerkung 2: Für die komplexe Exponentialfunktion gilt die Eulersche Formel $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$. Man hat daher für Fourierreihen eine äquivalente komplexe Darstellung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

mit den Beziehungen $\alpha_0 = \frac{a_0}{2}$, $\quad \alpha_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t,$

$$\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx} = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Definition

(1) Zu einer (integrierbaren) Funktion $f : [-\pi, \pi]$ definieren wir

die **Fourierkoeffizienten** $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ für } n = 0, 1, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \text{ für } n = 1, 2, \ldots,$$

die **Fourierreihe** $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx),$$

$$s_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx).$$

s_N ist die N-te **Partialsumme** der Fourierreihe von f.

(2) Sind a_n, b_n irgendwelche Zahlen, so heißt eine Funktion der Form s_N ein **trigonometrisches Polynom** vom Grad N.

Beispiel: Sei die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

und $f(0) = 0$. Dann ist f ungerade, hat also die Fourierkoeffizienten $a_n = 0$ und wegen $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi n} \left(1 - (-1)^n\right) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi n}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe von f die Sinusreihe $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

An den Sprungstellen $x = -\pi, 0, \pi$ hat die Fourierreihe nicht den Wert $f(x)$, sondern den Wert $\frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right) = 0$; dort wird f also *nicht* durch seine Fourierreihe dargestellt.

Wir werden später feststellen, dass die Fourierreihe an den Stetigkeitsstellen von f gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\begin{cases}-1, & \text{falls } -\pi<x<0,\\ 1, & \text{falls } 0<x<\pi.\end{cases}$$

Für $x=\frac{\pi}{2}$ ergibt sich daraus mit $\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{n-1}$ die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\ldots=\frac{\pi}{4}.$$