Karlsruher Institut für Technologie

Mathematik und Musik
Schnupperkurs 2025
Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

Übungsblatt 4

Aufgabe 29
Seien $\vec{x} = (x_1, x_2)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2)$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Wie in der Vorlesung bezeichne $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ die Länge von $\vec{x}$ und $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ das Skalarprodukt.
a) Die Projektion von $\vec{x}$ in Richtung $\vec{y}$ ist der Vektor

$$\vec{x}_{\vec{y}} := \left(\vec{x} \cdot \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}\right) \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}.$$

Zeigen Sie: $\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}$ steht senkrecht auf $\vec{y}$ und es gilt $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}_{\vec{y}}| \cdot |\vec{y}| = |\vec{y}_{\vec{x}}| \cdot |\vec{x}|$.
b) Zeigen Sie: Es gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$$

und dort herrscht Gleichheit genau dann, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear abhängig sind, d.h. $\vec{x} = \lambda \vec{y}$. Was bedeutet das geometrisch? *Hinweis:* Berechnen Sie $|\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}|^2$.
c) Folgern Sie aus b) die **Dreiecksungleichung** $|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$.
d) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist ein Spezialfall der Hölderschen Ungleichung in Aufgabe 26. Seien nun $p > 1$ und Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geqslant 0$ gegeben. Folgern Sie aus der Hölderschen Ungleichung die **Minkowskische Ungleichung**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Dreiecksungleichung in c) ist ein Spezialfall dieser Ungleichung.

Aufgabe 30
Seien $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$. Verwenden Sie in dieser Aufgabe nur die Grundeigenschaften des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle$ (Vorlesung 4, Folie 4).
a) Zeigen Sie den **Satz des Pythagoras**: Ist f senkrecht auf g, so ist $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.
b) Zeigen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

Hinweis: Berechnen Sie wie in Aufgabe 29b) $\left\| f - \langle f, \frac{g}{\|g\|}\rangle \frac{g}{\|g\|} \right\|^2$.
c) Folgern Sie aus b) die Dreiecksungleichung

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

d) Zeigen Sie den *Parallelogrammsatz* $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$.
Bemerkung: Es gelten auch analoge Versionen der Hölderschen und der Minkowskischen Ungleichung für Integrale.

Aufgabe 31
Es sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynome $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ vom Grad $\leqslant 2$. Für $f, g \in \mathcal{P}$ definieren wir

$$\langle f, g\rangle := f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0).$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle f, g\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}$ ist, also die Grundeigenschaften erfüllt.
b) Zeigen Sie: Aus $\langle f, f\rangle = 0$ folgt $f = 0$.
c) Berechnen Sie den Abstand der Polynome $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x$ in $\mathcal{P}$.

Aufgabe 32
Seien $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$.
a) Sei s_N die N-te Partialsumme der Fourierreihe von f und t ein trigonometrisches Polynom vom Grad N. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $f - s_N$ senkrecht auf t steht. Zeigen Sie umgekehrt: Steht $f - t$ senkrecht auf jedem trigonometrischen Polynom s vom Grad N, so folgt $t = s_N$.
b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\sum_{n=0}^{\infty}\langle f, e_n\rangle^2$ gegen $\|f\|^2$ konvergiert (Parsevalsche Gleichung). Zeigen Sie umgekehrt: Ist $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2$ irgendeine konvergente Reihe, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n$ gegen eine Funktion $f \in L^2[-\pi, \pi]$ und es gilt $\alpha_n = \langle f, e_n\rangle$.
c) Zeigen Sie die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, e_n\rangle\langle g, e_n\rangle.$$

Aufgabe 33
a) Folgern Sie aus den Fourierentwicklungen der Funktionen in Aufgabe 27a) die Reihenwerte

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

b) Folgern Sie aus der Fourierentwicklung von $g(x) = |\sin(x)|$ in Aufgabe 27b) die Reihenwerte

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 34
Sei f eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(-\pi) = f(\pi)$ und $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Zeigen Sie:
a) Es gilt die *Wirtingersche Ungleichung*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Parsevalsche Gleichung.
b) In a) gilt Gleichheit genau dann, wenn $f(x) = A\sin x + B\cos x$ für gewisse Konstanten A, B ist.

Aufgabe 35
Sei $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Setzt man in die N-te Partialsumme der Fourierreihe von f die Formeln für die Fourierkoeffizienten a_n, b_n ein, so ergibt sich

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{N}\cos(nt)\cos(nx) + \sin(nt)\sin(nx)\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

mit dem **Dirichlet-Kern** D_n. a) Beweisen Sie für D_n die Darstellung

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N}\cos nt = \begin{cases}\frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}, & \text{falls } t \neq 2\pi k \text{ für jedes } k \in \mathbb{Z},\\ 2N+1, & \text{sonst.}\end{cases}$$

b) Begründen Sie: D_n ist gerade, 2π-periodisch und es gilt $\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \pi$.
c) Folgern Sie die Darstellung

$$s_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t) - f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\sin(2N+1)\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung: Ist f differenzierbar in x, so kann man mithilfe des Satzes von Riemann-Lebesgue zeigen, dass dieser Ausdruck für $N \to \infty$ gegen 0 geht, also die Fourierreihe punktweise gegen $f(x)$ konvergiert.

Aufgabe 36
In Aufgabe 27 haben wir die Partialbruchzerlegung des Cotangens hyperbolicus hergeleitet; diese soll nun genutzt werden, um die Werte aller Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ zu berechnen. Zeigen Sie dazu nacheinander:
a) Aus der Wahl $\pi t = \frac{x}{2}$ erhält man die Darstellung

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + (2n\pi)^2}. \tag{1}$$

b) Mithilfe der geometrischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ für $|q| < 1$ schreiben sich die Reihenglieder von (1) in der Form

$$\frac{2x^2}{x^2 + (2n\pi)^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2n\pi)^{2k}} \text{ für kleine } |x|.$$

Für die linke Seite von (1) wird nun noch eine zweite Reihendarstellung hergeleitet. Die Exponentialfunktion kann in eine *Taylorreihe* entwickelt werden: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$ Für die Funktion

$$f(x) := \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \dots} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right)^{-1}$$

machen wir den Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2} + B_3 \frac{x^3}{6} + \dots$
c) Durch Ausmultiplizieren und einen Koeffizientenvergleich ergibt sich $B_0 = 1$ und für $n = 1, 2, \dots$

$$B_0 \frac{1}{(n+1)!} + B_1 \frac{1}{n!} + \frac{B_2}{2} \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{B_n}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n+1}{k} = 0.$$

d) Die Zahlen B_n heißen **Bernoulli-Zahlen**. Sie berechnen sich mithilfe von c) sukzessive zu

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_3 = 0, \qquad B_4 = -\frac{1}{30}, \qquad B_5 = 0, \qquad B_6 = \frac{1}{42}, \qquad B_7 = 0, \dots$$

e) Die Funktion $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} - 1$ ist gerade und daher gilt $B_{2n+1} = 0$ für $n = 1, 2, \dots$
f) Setzt man die Entwicklung von f in (1) ein, so erhält man die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2n\pi)^{2k}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) x^{2k} \text{ für kleine } |x|$$

und aus einem Koeffizientenvergleich folgt schließlich die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$

g) Man findet zum Beispiel die Reihenwerte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Bemerkung: Die Bestimmung der Werte aller Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}$ ist ein bis heute ungelöstes Problem.

Die Aufgaben können bis zum 03.06.25 digital an uwnkv@student.kit.edu zur Korrektur abgegeben werden.