Mathematatik und Musik
Schnupperkurs 2025
Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

Lösungshinweise zu Übungsblatt 4

Aufgabe 29
a) $(\vec{x}-\vec{x}_{\vec{y}})\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{y} - (\vec{x}\cdot\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|})(\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}\cdot\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y} - (\vec{x}\cdot\vec{y})\frac{1}{|\vec{y}|^2}(\vec{y}\cdot\vec{y}) = 0$, denn $\vec{y}\cdot\vec{y} = |\vec{y}|^2$. Weiter verwenden wir wieder $|\vec{x}|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x}$, um zu berechnen: $|\vec{x}_{\vec{y}}|^2 = (\vec{x}\cdot\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|})^2(\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}\cdot\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}) = (\vec{x}\cdot\vec{y})^2\frac{1}{|\vec{y}|^2}$, also nach Wurzelziehen $|\vec{x}_{\vec{y}}|\cdot|\vec{y}| = |\vec{x}\cdot\vec{y}|$. Vertauschen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zeigt auch $|\vec{y}_{\vec{x}}|\cdot|\vec{x}| = |\vec{y}\cdot\vec{x}| = |\vec{x}\cdot\vec{y}|$.
b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\vec{x}-\vec{x}_{\vec{y}}|^2 &= \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\left(\vec{x}\cdot\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}\right)\left(\vec{x}\cdot\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}\right) + \left(\vec{x}\cdot\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}\right)^2\left(\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}\cdot\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}\right) \\ &= |\vec{x}|^2 - \left(\vec{x}\cdot\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}\right)^2 = |\vec{x}|^2 - (\vec{x}\cdot\vec{y})^2\frac{1}{|\vec{y}|^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $(\vec{x}\cdot\vec{y})^2\frac{1}{|\vec{y}|^2} \leqslant |\vec{x}|^2$, also $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leqslant |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\vec{x} = \vec{x}_{\vec{y}}$, also $\vec{x}$ ein Vielfaches von $\vec{y}$ ist. Das Skalarprodukt $\vec{x}\cdot\vec{y}$ ist folglich maximal, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ parallel sind.
c) $|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = |\vec{x}|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2 \leq |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}|\cdot|\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2$.
d) Für $q = \frac{p}{p-1} > 1$ gilt $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} A := \sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p &= \sum_{k=1}^n (a_k+b_k)(a_k+b_k)^{p-1} = \sum_{k=1}^n a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k(a_k+b_k)^{p-1} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= A^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right). \end{aligned}$$

Division durch $A^{\frac{1}{q}}$ (Im Fall $A = 0$ ist die Behauptung klar) liefert links $A^{1-\frac{1}{q}} = A^{\frac{1}{p}} = (\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p)^{\frac{1}{p}}$, also die Minkowskische Ungleichung. Die Dreiecksungleichung folgt aus ihr mit $p = q = 2$, ebenso wie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus der Hölderschen Ungleichung.

Aufgabe 30
a) $\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + 2\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2$, denn $\langle f,g\rangle = 0$.
b) Mit dem Hinweis ist

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \left\| f - \langle f, \frac{g}{\|g\|}\rangle\frac{g}{\|g\|}\right\|^2 &= \langle f,f\rangle - 2\langle f, \langle f,\frac{g}{\|g\|}\rangle\frac{g}{\|g\|}\rangle + \langle\langle f,\frac{g}{\|g\|}\rangle\frac{g}{\|g\|}, \langle f,\frac{g}{\|g\|}\rangle\frac{g}{\|g\|}\rangle \\ &= \|f\|^2 - 2\langle f,\frac{g}{\|g\|}\rangle^2 + \langle f,\frac{g}{\|g\|}\rangle^2\langle\frac{g}{\|g\|},\frac{g}{\|g\|}\rangle = \|f\|^2 - \langle f,g\rangle^2\frac{1}{\|g\|^2}, \end{aligned}$$

denn $\langle\frac{g}{\|g\|},\frac{g}{\|g\|}\rangle = \frac{1}{\|g\|^2}\langle g,g\rangle = 1$. Durch Umstellen folgt daraus $\langle f,g\rangle^2\frac{1}{\|g\|^2} \leqslant \|f\|^2$, also die Behauptung.
c) $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\langle f,g\rangle + \|g\|^2 \leqslant \|f\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\|+\|g\|)^2$.
d) $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = \|f\|^2 + 2\langle f,g\rangle + \|g\|^2 + \|f\|^2 - 2\langle f,g\rangle + \|g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$.

Aufgabe 31
a) Die Symmetrie $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$ ist klar. Für die Linearität beachte $(f_1+f_2)(0) = f_1(0)+f_2(0)$, $(f_1+f_2)'(0) = (f_1'+f_2')(0) = f_1'(0)+f_2'(0)$ und genauso $(\lambda f)(0) = \lambda f(0), (\lambda f)'(0) = \lambda f'(0)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \langle f_1+f_2, g\rangle &= [f_1(0)+f_2(0)]g(0) + [f_1'(0)+f_2'(0)]g'(0) + [f_1''(0)+f_2''(0)]g''(0) \\ &= [f_1(0)g(0) + f_1'(0)g'(0) + f_1''(0)g''(0)] + [f_2(0)g(0) + f_2'(0)g'(0) + f_2''(0)g''(0)] \\ &= \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle \end{aligned}$$

und $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda f(0)g(0) + \lambda f'(0)g'(0) + \lambda f''(0)g''(0) = \lambda\langle f, g\rangle$. Aus der Symmetrie folgt nun $\langle f, g_1 + g_2\rangle = \langle g_1 + g_2, f\rangle = \langle g_1, f\rangle + \langle g_2, f\rangle = \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle$ und genauso $\langle f, \lambda g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$.
b) Sei $0 = \langle f, f\rangle = f(0)^2+f'(0)^2+f''(0)^2$. Da alle Terme nichtnegativ sind, muss dann $f(0)^2 = f'(0)^2 = f''(0)^2 = 0$ sein und daher $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Nun ist aber $f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2a_2$, es folgt $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ und daher $f = 0$.
c) $\|f - g\| = \sqrt{\langle f - g, f - g\rangle} = \big((x^2 - x + 1)(0)^2 + (x^2 - x + 1)'(0)^2 + (x^2 - x + 1)''(0)^2\big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.

Aufgabe 32

a) Nach Voraussetzung ist $\langle f - t, e_n\rangle = 0$ für alle e_n, also $\langle f, e_n\rangle = \langle t, e_n\rangle$. Das bedeutet, dass die Fourierkoeffizienten von f und t übereinstimmen, also $s_N = t$. (Die Fourierreihe von t ist t.)
b) Mit Pythagoras ist $\left\|\sum_{n=0}^N \alpha_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^N \|\alpha_n e_n\|^2 = \sum_{n=0}^N \alpha_n^2$. Da $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n^2$ nach Voraussetzung konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n e_n$ gegen eine Funktion $f \in L^2[-\pi, \pi]$; das ist die Vollständigkeit von $L^2[-\pi, \pi]$. Es folgt $\langle f, e_m\rangle = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n\langle e_n, e_m\rangle = \alpha_m$.
c) Da f und g in $L^2[-\pi, \pi]$ durch ihre Fourierreihe dargestellt werden, berechnet man

$$\langle f, g\rangle = \langle\sum_{n=0}^\infty\langle f, e_n\rangle e_n, \sum_{k=0}^\infty\langle g, e_k\rangle e_k\rangle = \sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty\langle f, e_n\rangle\langle g, e_k\rangle\langle e_n, e_k\rangle = \sum_{n=0}^\infty\langle f, e_n\rangle\langle g, e_n\rangle.$$

Aufgabe 33

a) Nach Vorlesung konvergieren die Fourierreihen von $f(x) = x$ und $g(x) = |x|$ punktweise an allen Stetigkeitsstellen gegen $f(x)$ bzw. $g(x)$. Für $x = \frac{\pi}{2}$ folgt daraus $\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n} = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, beachte

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{k-1}, & \text{falls } n = 2k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Genauso ist $\pi = g(\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2n-1)\pi}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}$, also $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
Aus der Parsevalschen Gleichung folgt weiter

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{n^2},$$
$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{1}{\pi}\|g\|^2 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{16}{\pi^2(2n-1)^4},$$

also $\sum_{n=1}^\infty \frac{16}{\pi^2(2n-1)^4} = (\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2})\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^4}{96}$.
b) Wie in a) erhält man durch Einsetzen von $x = 0$ den Reihenwert $0 = g(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1}$, durch Einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ ferner $1 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$. Aus der Parsevalschen Gleichung folgt zuletzt

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\|g\|^2 = \frac{8}{\pi^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{16}{\pi^2(1 - 4n^2)^2}.$$

Aufgabe 34

a) Nach Voraussetzung ist der Fourierkoeffizient $a_0 = 0$ und die Fourierreihen von f und f' konvergieren punktweise gegen $f(x)$ bzw. $f'(x)$ für alle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Aus der Parsevalschen Gleichung folgt $\|f\|^2 = \pi\sum_{n=1}^\infty(a_n^2 + b_n^2)$. Nach Vorlesung sind wegen $f(\pi) = f(-\pi)$ die Fourierkoeffizienten a_n', b_n' von f' gegeben durch $a_0' = 0$ sowie $a_n' = nb_n, b_n' = -na_n$ für $n = 1, 2, \ldots$. Daraus folgt wiederum mit der Parsevalschen Gleichung für f'

$$\|f'\|^2 = \pi\sum_{n=1}^\infty(a_n')^2 + (b_n')^2 = \pi\sum_{n=1}^\infty n^2(a_n^2 + b_n^2) \geqslant \pi\sum_{n=1}^\infty a_n^2 + b_n^2 = \|f\|^2. \ \square$$

b) Aus a) erkennt man, dass Gleichheit in der Wirtingerschen Ungleichung genau dann gilt, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2$, also $a_n = b_n = 0$ für alle $n = 2,3,\dots$ ist. Das bedeutet aber $f(x) = a_1\cos x + b_1 \sin x$, wie behauptet.

Aufgabe 35

a) Mit einem Additionstheorem ist $D_n(x-t) = 1+2\sum_{n=1}^{N}\cos n(x-t)$. Ist $x-t = 2\pi k$ für ein $k\in\mathbb{Z}$, so folgt $D_n(t) = 1+2\sum_{n=1}^{N}\cos 2\pi nk = 1+2\sum_{n=1}^{N} 1 = 1+2N$. Andernfalls berechnen wir die Teleskopsumme

$$D_n(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(\sin\left(nt+\frac{t}{2}\right) - \sin\left(nt-\frac{t}{2}\right)\right) = \sin\left(Nt+\frac{t}{2}\right).$$

b) Offenbar ist $D_n(-t) = D_n(t)$ und $D_n(t+2\pi) = \frac{\sin((2N+1)\frac{t}{2}+(2N+1)\pi)}{\sin(\frac{t}{2}+\pi)} = \frac{-\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{-\sin\frac{t}{2}} = D_n(t)$. Wählt man $f=1$ und $x=0$, so ist

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) Mit der Substitution $t = x-y$ und b) folgt zunächst $s_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-y)D_n(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t$. Damit ergibt sich wie behauptet

$$s_N(x)-f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(x)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 36

a) $\coth(\frac{x}{2}) = \frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{e^x-1}+1$. Mit Aufgabe 27c) ist daher

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2} = \frac{x}{2\pi}\coth\left(\frac{x}{2}\right) = 1+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(\frac{x}{2})^2+(n\pi)^2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2+(2n\pi)^2}.$$

b) Wähle $q = -\frac{x^2}{(2n\pi)^2}$ ($|q|<1$ für kleine $|x|$), dann ist

$$\frac{2x^2}{x^2+(2n\pi)^2} = -2\cdot\frac{q}{1-q} = -2\sum_{k=1}^{\infty} q^k = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{(2n\pi)^{2k}}.$$

c) Es ist $1 = f(x)\frac{e^x-1}{x} = (B_0+B_1x+B_2\frac{x^2}{2}+B_3\frac{x^3}{6}+\dots)(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\dots)$. Durch Ausmultiplizieren und Vergleich mit der linken Seite 1 ergibt sich $B_0 = 1$ (konstanter Term), $B_0\frac{1}{2}+B_1 = 0$ (Koeffizient von x), $B_0\frac{1}{6}+B_1\frac{1}{2}+\frac{B_2}{2} = 0$ (Koeffizient von x^2) u.s.w., allgemein für den Koeffizienten von x^n

$$0 = B_0\frac{1}{(n+1)!}+B_1\frac{1}{n!}+\frac{B_2}{2}\frac{1}{(n-1)!}+\dots+\frac{B_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n+1-k)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} B_k\binom{n+1}{k}.$$

d) Wegen $\frac{1}{(n+1)!}\binom{n+1}{n} = \frac{1}{n!}$ folgt aus c) $B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} B_k\binom{n+1}{k}$ und man kann $B_1, B_2, \dots$ durch Einsetzen berechnen.

e) Aus d) erhalten wir die Darstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n = B_0+B_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$, also $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n = f(x)-B_1x-B_0 = \frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}-1$. Diese Funktion ist gerade, denn $\frac{-x}{e^{-x}-1}-\frac{x}{2} = \frac{xe^x}{e^x-1}-x+\frac{x}{2} = \frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$. Es folgt

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-1)^n x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Das kann aber nur gelten, falls $2\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ für alle $n = 1,2,\dots$, also $B_{2n+1} = 0$.

f) Nach e) ist $\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}-1 = \sum_{n=2}^{\infty} B_n\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}-1 \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2+(2n\pi)^2} \overset{b)}{=} 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{(2n\pi)^{2k}}.$$

Nach Vertauschen der Summationsreihenfolgen folgt $\frac{B_{2k}}{(2k)!} = 2(-1)^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n\pi)^{2k}}$.

g) Setze $k = 1,2,3$ in die Formel aus f) ein.