Mathematik und Musik
Schnupperkurs 2025
Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

Übungsblatt 3

Aufgabe 21
a) Zeigen Sie: Ist f differenzierbar in x, so konvergiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

Hinweis: Nach Definition ist $f'(x) = \frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)) + R(h)$ mit einem Rest $R(h)\to 0$ für $h\to 0$.
b) Finden Sie eine Funktion f, die an einer Stelle x nicht differenzierbar ist, sodass aber der linke Grenzwert in Teilaufgabe a) existiert.
c) Zeigen Sie: Ist f zweimal differenzierbar in x, so konvergiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1}{h}(f'(x)-f'(x-h))$.

Aufgabe 22
Zu einer gegebenen Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen

$$f_+(x) := \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)), \qquad f_-(x) := \frac{1}{2}(f(x)-f(-x)).$$

a) Zeigen Sie: f_+ ist gerade, f_- ist ungerade und es gilt $f = f_+ + f_-$.
b) Zeigen Sie: Die Zerlegung in a) ist eindeutig, d.h. ist g eine gerade und u eine ungerade Funktion mit $f = g+u$, so folgt $g = f_+$ und $u = f_-$.
c) Für die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ heißen $\cosh x := f_+(x)$ und $\sinh x := f_-(x)$ der **Kosinus und Sinus hyperbolicus**. Zeigen Sie die *Hyperbelgleichung*

$$f_+^2(x) - f_-^2(x) = 1.$$

sowie die Ableitungsregeln $(\cosh x)' = \sinh x$ und $(\sinh x)' = \cosh x$.

Aufgabe 23
Sei $c>0$ und die (homogene) Differentialgleichung

$$f'' + c^2 f = 0 \tag{*}$$

gegeben. Zeigen Sie nacheinander:
a) Ist f eine Lösung von (*), so ist $c^2f^2 + (f')^2$ konstant.
b) Ist f eine Lösung von (*) und $f(0) = f'(0) = 0$, so ist $f = 0$.
c) Ist f eine Lösung von (*) und $f(0) = A, f'(0) = Bc$, so ist

$$f(x) = A\cos(cx) + B\sin(cx).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h(x) = f(x) - A\cos(cx) - B\sin(cx)$.
d) Die Lösungen von (*) lassen sich schreiben in der Form

$$f(x) = C\cos(cx-\varphi)$$

mit $C = \sqrt{A^2+B^2}$ und $\cos\varphi = \frac{A}{C}, \sin\varphi = \frac{B}{C}$.

Aufgabe 24
a) Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_t^2 y(x,t) = \partial_x^2 y(x,t), \qquad y(x,0) = x^2, \qquad \partial_t y(x,0) = x.$$

b) Es sei $y(x,t)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung $\partial_x^2 y = \partial_t^2 y$. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen dann auch Lösungen sind:

$$y_\lambda(x,t) := y(\lambda x, \lambda t) \text{ für } \lambda > 0, \qquad y_\varepsilon(x,t) := y\left(\frac{x-\varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \frac{t-\varepsilon x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) \text{ für } -1 < \varepsilon < 1.$$

c) Wie bei der schwingenden Saite sei $c^2 = \frac{\tau}{\varrho}$ und $y(x,t)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung $c^2\partial_x^2 y = \partial_t^2 y$, die zusätzlich die Randbedingungen $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$ erfüllt. Zeigen Sie den **Energieerhaltungssatz**, d.h.

$$E(t) := \frac{\varrho}{2}\int_0^\pi \partial_t y(x,t)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\tau}{2}\int_0^\pi \partial_x y(x,t)^2 \,\mathrm{d}x = E(0)$$

für alle Zeiten t. *Hinweis:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int \partial_t f(x,t)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 25
Es sei c ein konstanter „Wind“ und die Funktion $f(x,t)$ gegeben. Die (inhomogene) **Transportgleichung**

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c\frac{\partial y}{\partial x} = f$$

ist eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung.
a) Sei $y(x,t)$ eine Lösung der Transportgleichung, die zusätzlich die Anfangsbedingung $y(x,0) = g(x)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $y(x,t)$ folgende Form hat:

$$y(x,t) = g(x-ct) + \int_0^t f(x+c(s-t),s)\,\mathrm{d}s.$$

Hinweis: Differenzieren Sie $y(x+ct,t)$ nach t.
b) Nun sei $y(x,t)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung $c^2\partial_x^2 y = \partial_t^2 y$, die zusätzlich die Anfangsbedingungen $y(x,0) = g(x)$ und $\partial_t y(x,0) = h(x)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $z(x,t) := \partial_t y(x,t) - c\partial_x y(x,t)$ die homogene Transportgleichung mit geeigneten Anfangsbedingungen löst.
c) Folgern Sie aus b), dass y die inhomogene Transportgleichung mit geeigneten Anfangsbedingungen löst, und leiten Sie so die Formel von d'Alembert her:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 26
Seien $a, b \geqslant 0$ und $p, q > 1$ zueinander *konjugiert*, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
a) Berechnen Sie das globale Maximum der Funktion $f(a) = ab - \frac{a^p}{p}$.
b) Folgern Sie aus a) die **Youngsche Ungleichung**

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

c) Beweisen Sie für Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geqslant 0$ die **Höldersche Ungleichung**

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hinweis: Dividieren Sie zuerst durch die rechte Seite.

Aufgabe 27

a) Berechnen Sie die Fourierreihen der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = |x|$ für $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.
Bemerkung: Dieselbe Funktion kann also sowohl durch eine Sinusreihe als auch durch eine Kosinusreihe dargestellt werden.

b) Berechnen Sie die Fourierreihen der Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = |\sin x|$ für $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

c) Sei $t \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe der Funktion $f(x) = \cosh(tx)$ für $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (siehe Aufgabe 22) gegeben ist durch

$$\frac{\sinh(t\pi)}{t\pi} + \frac{2t\sinh(t\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{t^2+n^2}.$$

Wir werden später zeigen, dass f an jeder Stelle x mit seiner Fourierreihe übereinstimmt. Für $x = \pi$ folgt daraus die *Partialbruchzerlegung des Cotangens hyperbolicus*

$$\pi\coth t\pi = \frac{\pi\cosh(t\pi)}{\sinh(t\pi)} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2+n^2}.$$

Aufgabe 28

In dieser Aufgabe wird mithilfe der Integrale $c_n := \int_0^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x$ die ganz erstaunliche **Wallissche Produktformel** für die Kreiszahl π hergeleitet. Zeigen Sie dazu nacheinander:

a) $c_0 = \pi, c_1 = 2$.

b) $c_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}c_n$. *Hinweis:* Partielle Integration.

c) $c_n \leqslant c_{n+1} \leqslant c_{n+2}$.

d) $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} \to 1$ für $n \to \infty$.

e) $\dfrac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)}\cdot\frac{c_1}{c_0}$.

f) $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots$

Die Aufgaben können bis zum 27.05.25 digital an uwnkv@student.kit.edu zur Korrektur abgegeben werden.