Karlsruher Institut für Technologie

Mathematatik und Musik
Schnupperkurs 2025
Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

Übungsblatt 3 – Lösungshinweise

Aufgabe 21
a) Setzt man den Hinweis zweimal ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{2h}\left(f(x+h)-f(x-h)\right)=\frac{f(x+h)-f(x)}{2h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-2h}=\frac{1}{2}\big(f'(x)-R(h)+f'(x)-R(-h)\big)$$
$$\to \frac{1}{2}\cdot 2f'(x)=f'(x)\ (h\to 0).$$

b) Die Betragsfunktion $f(x)=|x|$ ist an der Stelle $x=0$ nicht differenzierbar, aber der linke Grenzwert gleich 0. (Die Aussage in a) ist also eine schwächere Bedingung als Differenzierbarkeit.)
c) Setzt man wieder zweimal Hinweis aus a) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{h}\big(f'(x)-f'(x-h)\big)=\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+R(h)-\frac{f(x)-f(x-h)}{h}-R(h)\right)$$
$$=\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

Da f' differenzierbar ist, konvergiert die linke Seite gegen $f''(x)$, also auch die rechte.

Aufgabe 22
a) Offenbar ist $f_+(-x)=f_+(x), f_-(-x)=-f_-(x)$ und $f_+(x)+f_-(x)=\frac{1}{2}\cdot 2f(x)=f(x)$.
b) Aus $f_++f_-=f=g+u$ folgt $f_+-g=u-f_-$. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine gerade Funktion, die rechte eine ungerade; aber nur die Nullfunktion ist zugleich gerade und ungerade ($f(x)=-f(-x)=-f(x)$, also $2f(x)=0$). Es folgt $f_+-g=0=u-f_-$.
c) Für $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ und $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ berechnet man

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=(\cosh x+\sinh x)(\cosh x-\sinh x)=\frac{2e^x}{2}\cdot\frac{2e^{-x}}{2}=1$$

und $(\cosh x)'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sinh x, (\sinh x)'=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x$.

Aufgabe 23
a) $(c^2f^2+(f')^2)'=2c^2ff'+2f'f''=2f'(c^2f+f'')=0$.
b) Nach a) ist $c^2f(x)^2+f'(x)^2=c^2f(0)^2+f'(0)^2=0$. Das kann nur für $c^2f(x)^2=f'(x)^2=0$ erfüllt sein, also $f(x)=0$.
c) h erfüllt $h(0)=h'(0)=0$ und

$$h''(x)=f''(x)+Ac^2\cos(cx)+Bc^2\sin(cx)=-c^2(f(x)-A\cos(cx)-B\sin(cx))=-c^2h(x),$$

ist also eine Lösung von (*). Aus b) folgt $h=0$.
d) Wählt man φ mit $\cos\varphi=\frac{A}{C}$, so gilt $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{1}{C}\sqrt{C^2-A^2}=\frac{B}{C}$ und daher

$$C\cos(cx-\varphi)=C\cos(cx)\cos\varphi+C\sin(cx)\sin\varphi=A\cos(cx)+B\sin(cx)=f(x).$$

Aufgabe 24
a) Einsetzen in die Formel von D'Alembert liefert

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left((x+t)^2+(x-t)^2\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}y\,\mathrm{d}y=x^2+t^2+xt.$$

b) Man berechnet $\partial_x^2 y_\lambda(x,t) = \lambda^2 \partial_x^2 y(\lambda x, \lambda t) = \partial_t^2 y_\lambda(x,t)$ und mit der mehrdimensionalen Kettenregel

$$\begin{aligned}
\partial_x y_\varepsilon(x,t) &= \partial_x y\left(\frac{x-\varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \frac{t-\varepsilon x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \partial_t y\left(\frac{x-\varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \frac{t-\varepsilon x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) \cdot \frac{-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\
\partial_x^2 y_\varepsilon(x,t) &= \frac{\partial_x^2 y\,(\ldots)}{1-\varepsilon^2} + \frac{\partial_t \partial_x y\,(\ldots)\cdot(-\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} + \frac{\partial_x \partial_t y\,(\ldots)\cdot(-\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} + \frac{\partial_t^2 y\,(\ldots)\cdot(-\varepsilon)^2}{1-\varepsilon^2} \quad \text{und analog} \\
\partial_t^2 y_\varepsilon(x,t) &= \frac{\partial_x^2 y\,(\ldots)\cdot(-\varepsilon)^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{\partial_t \partial_x y\,(\ldots)\cdot(-\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} + \frac{\partial_x \partial_t y\,(\ldots)\cdot(-\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} + \frac{\partial_t^2 y\,(\ldots)}{1-\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $\partial_x^2 y_\varepsilon(x,t) - \partial_t^2 y_\varepsilon(x,t) = \frac{\partial_x^2 y(\ldots)}{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon^2) + \frac{\partial_t^2 y(\ldots)}{1-\varepsilon^2}(\varepsilon^2-1) = \partial_x^2 y\,(\ldots) - \partial_t^2 y\,(\ldots) = 0$.
c) Man berechnet mithilfe des Hinweises, der Wellengleichung und partieller Integration

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{\varrho}{2}\int_0^\pi \partial_t(\partial_t y(x,t)^2)\,\mathrm{d}x + \frac{c^2\varrho}{2}\int_0^\pi \partial_t(\partial_x y(x,t)^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\varrho}{2}\int_0^\pi 2\partial_t y\cdot\partial_t^2 y + 2c^2\partial_x y\cdot\partial_t\partial_x y\,\mathrm{d}x \\
&= \varrho\left(\int_0^\pi \partial_t y\cdot c^2\partial_x^2 y\,\mathrm{d}x + c^2\left[\partial_x y\cdot\partial_t y\right]_0^\pi - c^2\int_0^\pi \partial_x^2 y\cdot\partial_t y\,\mathrm{d}x\right) = 0,
\end{aligned}$$

denn aus $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$ folgt auch $\partial_t y(0,t) = \partial_t y(\pi,t) = 0$. Also ist $E(t) = E(0)$ konstant.

Aufgabe 25

a) Es ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(x+ct,t) = c\partial_x y(x+ct,t) + \partial_t y(x+ct,t) = f(x+ct,t)$ und daher $y(x+ct,t) = y(x,0) + \int_0^t f(x+cs,s)\,\mathrm{d}s$. Daraus folgt

$$y(x,t) = y(x-ct,0) + \int_0^t f(x-ct+cs,s)\,\mathrm{d}s = g(x-ct) + \int_0^t f(x+c(s-t),s)\,\mathrm{d}s.$$

b) Es ist $\partial_t z = \partial_t^2 y - c\partial_t\partial_x y = c^2\partial_x^2 y - c\partial_t\partial_x y = -c\partial_x(\partial_t y - c\partial_x y) = -c\partial_x z$, d.h. z löst die homogene Transportgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$z(x,0) = \partial_t y(x,0) - c\partial_x y(x,0) = h(x) - cg'(x).$$

Aus a) folgt daher $z(x,t) = h(x-ct) - cg'(x-ct)$.
c) Nach b) löst y die inhomogene Transportgleichung mit $f = z$ (und $-c$ statt c) und den Anfangsbedingungen $y(x,0) = g(x)$. Aus a) folgt $y(x,t) = g(x+ct) + \int_0^t z(x-c(s-t),s)\,\mathrm{d}s$ und mit b)

$$\begin{aligned}
\int_0^t z(x-c(s-t),s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^t h(x-2cs+ct) - cg'(x-2cs+ct)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y) - cg'(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x-ct) - g(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Aufgabe 26

a) Für $b = 0$ ist offenbar $f(0) = 0$ das globale Maximum von f, daher sei $b > 0$. Die Ableitung $f'(a) = b - a^{p-1}$ hat ihre einzige Nullstelle bei $a_0 = b^{\frac{1}{p-1}} > 0$ und wegen $f''(a_0) = -(p-1)a_0^{p-2} < 0$ ist a_0 ein lokales Maximum. Wir berechnen $q = (1-\frac{1}{p})^{-1} = \frac{p}{p-1}$ und

$$f(a_0) = b^{\frac{1}{p-1}+1} - \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} = b^{\frac{p}{p-1}} - \frac{b^q}{p} = b^q\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{b^q}{q}.$$

Wegen $f(a_0) > 0 = f(0)$ ist also $f(a_0)$ das globale Maximum von f.
b) Aus a) folgt $f(a) \leqslant f(a_0)$, also $ab - \frac{a^p}{p} \leqslant \frac{b^q}{q}$ für alle $a, b \geqslant 0$.
c) Mindestens ein a_k und ein b_k seien positiv, sonst ist die Aussage klar. Wir schreiben die rechte Seite als $AB > 0$, nach b) ist dann $\frac{a_k}{A}\cdot\frac{b_k}{B} \leqslant \frac{a_k^p}{pA^p} + \frac{b_k^q}{qB^q}$. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant AB\cdot\left(\frac{1}{pA^p}\sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{1}{qB^q}\sum_{k=1}^n b_k^q\right) = AB\cdot\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = AB = \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Aufgabe 27

a) f ist ungerade und daher $a_n = 0$, wegen $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ist für $n = 1, 2, \dots$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos(nx)\right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

Die Fourierreihe von f ist daher die Sinusreihe $2\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$. Entsprechend ist g gerade und daher $b_n = 0$, es ergibt sich $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \pi$ sowie für $n = 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{-4}{n^2\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Fourierreihe von g ist also die Kosinusreihe $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

b) $f(x) = \sin x$ ist bereits ein trigonometrisches Polynom, stimmt also mit seiner Fourierreihe überein. g ist gerade, daher wieder $b_n = 0, a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}, a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 0$ und für $n = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}[\cos(x)\cos(nx)]_0^\pi - \frac{2n}{\pi}\int_0^\pi \cos(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}((-1)^n + 1) + \frac{2n^2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}((-1)^n + 1) + n^2 a_n. \\ \Rightarrow a_n &= \frac{2((-1)^n + 1)}{\pi(1 - n^2)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)}, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe von g die Kosinusreihe $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2n)x}{1-4n^2}$.

c) f ist gerade, daher ist $b_n = 0$ und wir berechnen $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh(tx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\sinh(t\pi)}{t\pi}$ sowie für $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh(tx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\sinh(t\pi)}{t\pi}(-1)^n + \frac{2n}{t\pi}\int_0^\pi \sinh(tx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\sinh(t\pi)}{t\pi}(-1)^n - \frac{n^2}{t^2}a_n \Rightarrow a_n = \frac{2t\sinh(t\pi)}{\pi(t^2 + n^2)}(-1)^n. \end{aligned}$$

Aufgabe 28

b) $c_{n+2} = \int_0^\pi \sin x\sin^{n+1} x\,\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^\pi \cos^2 x\sin^n x\,\mathrm{d}x = (n+1)(c_n - c_{n+2})$.

c) Für $0 \leqslant x \leqslant \pi$ ist $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, daraus folgt $\sin^2 x \leqslant \sin x \leqslant 1$, also $\sin^{n+2} x \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$. Wegen der Monotonie des Integrals gilt auch $c_{n+2} \leqslant c_{n+1} \leqslant c_n$.

d) Aus b) und c) folgt $\frac{n+1}{n+2}c_n \leqslant c_{n+1} \leqslant c_n$, also $1 \leftarrow \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant 1$ für $n \to \infty$.

e) Wiederholtes Einsetzen von b) ergibt $(k = n, n-1, \dots, 1)$

$$\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{c_{2n-1}}{c_{2n-2}} = \dots = \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)}\cdot\frac{c_1}{c_0}.$$

f) Nach d) konvergiert $\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \to 1$, aus a) und e) folgt schließlich

$$\prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{c_0}{c_1}\cdot\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \to \frac{c_0}{c_1} = \frac{\pi}{2}\ (n \to \infty).$$