Karlsruher Institut für Technologie

Mathematatik und Musik
Schnupperkurs 2025
Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

Übungsblatt 2

Aufgabe 12
Wir wissen bereits aus Aufgabe 8, dass genau die Funktionen $e(x) = Ce^{\lambda x}$ mit einer Konstanten C die Lösungen der (homogenen) Differentialgleichung $f' = \lambda f$ sind (**allgemeine Lösung**). Sei die Funktion g gegeben, wir suchen nun nach Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung

$$f' = \lambda f + g. \tag{*}$$

a) Zeigen Sie: Ist f_s irgendeine Lösung (**spezielle Lösung**) von (*), so sind die Lösungen von (*) genau die Funktionen $f(x) = Ce^{\lambda x} + f_s(x)$ mit einer Konstanten C.
b) Ist $C(x) = \int g(x)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$, so ist $f_s(x) = C(x)e^{\lambda x}$ eine Lösung von (*). (*Variation der Konstanten*)
c) Bestimmen Sie alle Lösungen von (*) für den Fall, dass $g = \alpha$ konstant ist.
d) Berechnen Sie jeweils alle Lösungen der Differentialgleichungen

$$f'(x) = f(x) + x^2, \qquad f'(x) = \cos x - 2f(x).$$

e) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $f' = \gamma f - \tau f^2$ und bringen Sie sie auf die Form in Aufgabe 8b). *Hinweis:* Mit dem Ansatz $f = \frac{1}{h}$ kommen Sie zur Gleichung $h' = \tau - \gamma h$.

Aufgabe 13
a) Berechnen Sie für $-1 \leqslant x \leqslant 1$ die Integralfunktionen der Funktionen $f(x) = x$ und

$$g(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

b) Berechnen Sie mithilfe der Substitution $x = r\sin t$ das Integral

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b) geometrisch.
d) Berechnen Sie mithilfe von Integration den Flächeninhalt der Ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Aufgabe 14
a) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sin x e^{\cos x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x}, \quad \int \frac{\sin x\cos x}{1+4\sin^2 x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x, \quad \int 2x\log(x^2-1)\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x+x^2},$$

$$\int 2x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{x}\log x\,\mathrm{d}x \quad \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}.$$

b) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-1}}, \quad \int_1^e \frac{1}{x+x\log x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi e^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

c) Berechnen Sie die Integralfunktion I_0 der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{falls } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

An welchen Stellen gilt $I_0'(x) = f(x)$? Wieso widerspricht dies nicht dem Hauptsatz?

Aufgabe 15

a) Beweisen Sie mithilfe des Hauptsatzes:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x).$$

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{x}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t$.

c) Zeigen Sie: Es gilt $F_n^{(n)}(x) = f(x)$ für die Funktion

$$F_n(x) := \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} \int_0^x t^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 16

Beweisen Sie mithilfe der Additionstheoreme und partieller Integration die **Orthogonalitätsrelationen**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m, \\ \pi, & \text{falls } n = m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m, \\ \pi, & \text{falls } n = m. \end{cases}$$

für alle $n = 1, 2, \ldots$ und $m = 0, 1, \ldots$ *Hinweis:* Behandeln Sie den (einfachen) Fall $m = 0$ separat.

Aufgabe 17

Es gilt $\log x \to -\infty$ für $x \to 0+$, daher vereinbart man für das **uneigentliche Integral**

$$\int_{\downarrow 0}^{1} \log x\,\mathrm{d}x := \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \log x\,\mathrm{d}x.$$

Genauso verfährt man für unbeschränkte Integrationsbereiche:

$$\int_0^{\uparrow\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x := \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

a) Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

$$\int_{\downarrow 0}^{1} -\log x\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\uparrow\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_2^{\uparrow\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\log^2 x}, \qquad \int_0^{\uparrow\infty} e^{-\lambda x}\sin x\,\mathrm{d}x \ (\lambda > 0).$$

b) Beweisen Sie die Aussagen

$$\int_1^{\uparrow\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} < \infty \text{ genau dann, wenn } \alpha > 1,$$

$$\int_{\downarrow 0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} < \infty \text{ genau dann, wenn } \alpha < 1.$$

c) Zeigen Sie $\int_0^{\uparrow\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$ für alle $n = 0, 1, \ldots$

Aufgabe 18

Seien $a, b \neq 0$. Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$ ist genau dann periodisch, wenn a und b **kommensurabel** sind, d.h. a und b beide das Vielfache eines gemeinsamen Maßes e sind. *Hinweis:* Betrachten Sie die Perioden der Funktion $g(x) = f(x) + \frac{1}{b^2} f''(x)$.

Aufgabe 19

a) Eine Orgelpfeife hat die drei aufeinander folgenden Resonanzfrequenzen 1310 Hz, 1834 Hz und 2358 Hz.

(i) Ist die Pfeife offen oder gedackt? Bestimmen Sie die Grundfrequenz.

(ii) Welche Oberschwingungen liegen vor? Skizzieren Sie die stehenden Wellen.

(iii) Berechnen Sie die (effektive) Länge der Orgelpfeife.

b) Die vier Saiten einer Violine sind jeweils 30 cm lang und im Quintabstand gestimmt (g, d^1, a^1, e^2). Die g-Saite klingt leer mit dem Ton $g = 196\,\text{Hz}$.

(i) Wo auf der g-Saite muss man den Finger für die Töne a, h, c^1 aufsetzen? *Bemerkung:* Das Ergebnis ist ungenau, da in der Realität der Ton mit seinen Obertönen überlagert klingt.

(ii) Wird eine Saite der (Linien-)Dichte ϱ mit Spannkraft F_s eingespannt, so breiten sich Wellen dort aus mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{F_s}{\varrho}}.$$

Alle vier Saiten sollen mit derselben Kraft eingespannt sein, damit sich die Geige nicht verzieht. Berechnen Sie die Dichte aller Saiten im Verhältnis zur g-Saite.

(iii) Berechnen Sie die Dichte der g-Saite für eine Spannkraft von $F_s = 90\,\text{N}$.

c) Eine stehende Welle auf einer Saite werde beschrieben durch die Wellenfunktion

$$y(x,t) = 0{,}02 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(40\pi t),$$

wobei x, y in Meter und t in Sekunden angegeben werden.

(i) Geben Sie Wellenlänge, Frequenz und die Wellenfunktion zweier laufender Wellen an, die sich zu dieser stehenden Welle überlagern.

(ii) Welchen Abstand haben die Knoten der stehenden Welle?

(iii) Die stehende Welle ist die fünfte Oberschwingung. Berechnen Sie die Länge der Saite.

Aufgabe 20

In der Realität bestehen Töne und Klänge nicht aus einzelnen Frequenzen, sondern aus einer Überlagerung aller Frequenzen in einem *Frequenzband* $[f, f + \Delta f]$. Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Tatsache, dass Klänge nicht unendlich lange, sondern nur eine endliche Zeit Δt andauern, die vom Einschwing- und Ausschwingvorgang der Schallquelle begrenzt wird.

a) Wir denken uns das Frequenzband $[f, f+\Delta f]$ in $n+1$ Frequenzen $f_j = f + \frac{j}{n}\Delta f$ für $j = 0, \dots, n$ unterteilt, die sich zu einem Klang überlagern:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n} A\cos(2\pi f_j t).$$

Die Zeit Δt zwischen dem Maximum bei $t = 0$ und dem ersten Minimum bei $t = \Delta t$ ist ein Maß für die zeitliche Ausdehnung des Wellenpaketes. Begründen Sie, dass $2\pi\Delta t \cdot \frac{\Delta f}{n} = \frac{2\pi}{n+1}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass sich für $n \to \infty$ die **akustische Unschärferelation** $\Delta f \Delta t = 1$ ergibt.

c) Eine Stimmgabel schwingt 20 ms lang mit dem Kammerton $a^1 = 440\,\text{Hz}$. Berechnen Sie die Länge und die Anzahl der Wellenlängen des emittierten Wellenpakets. Welchen Frequenzbereich nimmt ein Empfänger wahr?

Bemerkung: Das mathematische Werkzeug zur Behandlung von Frequenzbändern ist die **Fouriertransformation** $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx$.

Die Aufgaben können bis zum 13.05.25 digital an uwnkv@student.kit.edu zur Korrektur abgegeben werden.