

Übungsblatt 2 – Lösungshinweise

Aufgabe 12

- a) $f'(x) = C\lambda e^{\lambda x} + \lambda f_s(x) + g(x) = \lambda f(x) + g(x)$, also ist f eine Lösung von (*).
Ist umgekehrt f eine Lösung von (*), so ist $(f - f_s)' = \lambda(f - f_s)$, also nach Aufgabe 8 $f(x) - f_s(x) = Ce^{\lambda x}$ mit einer Konstanten C .
- b) Wegen $C'(x) = g(x)e^{-\lambda x}$ ist $f'_s(x) = C'(x)e^{\lambda x} + C(x)\lambda e^{\lambda x} = g(x) + \lambda f_s(x)$, also f_s Lösung von (*).
- c) $C(x) = -\frac{\alpha}{\lambda}e^{-\lambda x}$, also $f_s(x) = -\frac{\alpha}{\lambda}$ (was man auch erraten kann) und nach a) sind alle Lösungen $f(x) = Ce^{\lambda x} - \frac{\alpha}{\lambda}$ mit einer Konstanten C .
- d) Für die erste DGL berechne $C(x) = \int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ und daher $f(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2$. Für die zweite DGL berechne $C(x) = \int \cos(x)e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x)$ und daher $f(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{5}(\sin x + 2\cos x)$, jeweils mit einer beliebigen Konstanten C .
- e) Für jede Lösung f ist $h := \frac{1}{f}$ eine Lösung der DGL $h' = -\frac{f'}{f^2} = \frac{\tau f^2 - \gamma f}{f^2} = \tau - \gamma h$. Alle Lösungen dieser DGL sind nach c) gegeben durch $h(x) = Ce^{-\gamma x} + \frac{\tau}{\gamma}$ mit einer Konstanten C , also ist

$$f(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{\gamma}{\tilde{C}e^{-\gamma x} + \tau}$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} = \gamma C$. Umgekehrt haben wir schon in Aufgabe 8b) gezeigt, dass alle diese Funktionen Lösung der DGL $f' = \gamma f - \tau f^2$ sind.

Aufgabe 13

- a) Die Integralfunktion von f ist $I_{-1}(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = [\frac{1}{2}t^2]_{-1}^x = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. Die Integralfunktion von g ist

$$I_{-1}(x) = \int_{-1}^x g(t) dt = \begin{cases} \int_{-1}^x -t dt = \frac{1}{2}(1 - x^2), & \text{falls } -1 \leq x < 0, \\ \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^x t dt = \frac{1}{2}(1 + x^2), & \text{falls } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- b) $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 [\sin(x) \cos(x) + x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} r^2$.
- c) In a) gibt die Integralfunktion die Flächeninhaltsbilanz über dem Intervall $[-1, x]$ an. Zum Beispiel ist $\frac{1}{2}(1 + x)(1 - x)$ der Flächeninhalt des von g begrenzten Trapezes im vierten Quadranten, der bis $\frac{1}{2}$ bei $x = 0$ anwächst; für $x > 0$ kommt der Flächeninhalt $\frac{1}{2}x \cdot x$ des Dreiecks im ersten Quadranten hinzu. Bei f zählt der Flächeninhalt für $-1 \leq x \leq 0$ negativ, für $x = 1$ ist die Flächeninhaltsbilanz gleich 0. In b) wird die Fläche des Halbkreises um den Ursprung mit Radius r berechnet.
- d) Auflösen ergibt $y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (obere Halbellipse). Der gesuchte Flächeninhalt ist also wie in b) gleich $2 \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2 \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{2} a^2 = \pi ab$.

Aufgabe 14

- a) $\frac{1}{3}(2x + 3)^{\frac{3}{2}}, \quad -e^{\cos x}, \quad \log |\log x|, \quad \frac{1}{8} \log(1 + 4 \sin^2(x)),$
 $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{2} \sin^2(x), \quad (x^2 - 1)(\log(x^2 - 1) - 1), \quad \log \left| \frac{x}{1 + x} \right|,$
 $-x^2 \cos(x^2) + \sin(x^2), \quad \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(\log(x) - \frac{2}{3} \right), \quad \tan(x) - x, \quad 4\sqrt[4]{\tan(x)}.$
- b) $10, \quad 0, \quad \frac{1}{3}(\sqrt{6} - 2), \quad -\frac{\pi^2}{2},$
 $\frac{1}{2}, \quad \log(2), \quad \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad 2 \log \left(\frac{3}{2} \right),$
 $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad \log(2), \quad \frac{1 - e^{-\pi}}{5}, \quad 2\sqrt{2}.$

$$c) I_0(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 0 = 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ \int_0^1 0 + \int_1^x 1 = x - 1, & \text{falls } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Überall außer bei $x = 1$ ist I_0 differenzierbar mit $I_0'(x) = f(x)$. Bei $x = 1$ hat I_0 jedoch einen Knick, ist also *nicht* differenzierbar; dies widerspricht nicht dem Hauptsatz, da f dort unstetig ist.

Aufgabe 15

a) Für $I_0(x) = \int_0^x f(t) dt$ gilt nach dem Hauptsatz $I_0'(x) = f(x)$, daraus folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\psi(x)} f(t) dt - \int_0^{\phi(x)} f(t) dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} (I_0(\psi(x)) - I_0(\phi(x))) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x). \end{aligned}$$

b) Nach a) und der Produktregel ist $f'(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1+e^{2t}} dt + x \cdot \frac{1}{1+e^{2x^3}} \cdot 2x^2$.

c) Die zweite Darstellung ergibt sich aus dem Binomischen Lehrsatz (für $n \geq 1$). Wir berechnen mithilfe der Produktregel und des Hauptsatzes

$$\begin{aligned} F_n'(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \binom{n-1}{k} \left((n-1-k)x^{n-2-k} \int_0^x t^k f(t) dt + x^{n-1-k} x^k f(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{(n-2)!} \binom{n-2}{k} x^{n-2-k} \int_0^x t^k f(t) dt + \frac{x^{n-1} f(x)}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} = F_{n-1}(x), \end{aligned}$$

denn $\frac{n-1-k}{(n-1)!} \binom{n-1}{k} = \frac{1}{(n-2)!} \binom{n-2}{k}$ und die zweite Summe verschwindet aufgrund von Aufgabe 5a). Daraus ergibt sich sukzessive $F_n^{(n)}(x) = \dots = F_1'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x)$.

Aufgabe 16

Für $m = 0$ ist $n \neq m$ und $\int_{-\pi}^{\pi} 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$. Für $m \geq 1$ berechnet man im Fall $n = m$ mit Additionstheoremen $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx = 0$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = 2\pi - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2nx) dx = \pi.$$

Im Fall $n \neq m$ berechnet man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx &= -\frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx, \end{aligned}$$

woraus sofort $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0$ folgt.

Aufgabe 17

a) Es ist $\int_0^1 -\log x dx = \int_0^{\uparrow\infty} e^{-x} dx = 1$ und $\int_2^{\uparrow\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} = [\frac{-1}{\log x}]_2^{\uparrow\infty} = \frac{1}{\log 2}$. Ferner

$$\int_0^{\uparrow\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx = [-e^{-\lambda x} \cos x]_0^{\uparrow\infty} - \lambda \int_0^{\uparrow\infty} e^{-\lambda x} \cos x dx = 1 - \lambda^2 \int_0^{\uparrow\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx$$

und daher $\int_0^{\uparrow\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx = \frac{1}{\lambda^2 + 1}$. Beachte dabei $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} \sin x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} \cos x = 0$, denn $\lambda > 0$ und $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$. (Analog zeigt man auch $\int_0^{\uparrow\infty} e^{-\lambda x} \cos x dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$.)

b) Im Fall $\alpha \neq 1$ ist $\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha}]_a^b = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})$. Für $a = 1$ ergibt sich $\frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1)$ und dies konvergiert genau dann für $b \rightarrow \infty$ (gegen $\frac{1}{\alpha-1}$), wenn $1 - \alpha < 0$. Für $b = 1$ ergibt sich $\frac{1}{1-\alpha} (1 - a^{1-\alpha})$ und dies konvergiert genau dann für $a \rightarrow 0$ (gegen $\frac{1}{1-\alpha}$), wenn $1 - \alpha > 0$.

Im Fall $\alpha = 1$ konvergiert $\int_a^b \frac{dx}{x} = \log b - \log a$ weder für $b \rightarrow \infty$ noch für $a \rightarrow 0$.

c) Partielle Integration ergibt $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n x^{n-1} e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ und damit sukzessive $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \cdot \dots \cdot 1 \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} dx = n! [-e^{-x}]_0^{\infty} = n!$. Beachte, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom x^n .

Aufgabe 18

Sind a und b kommensurabel, so ist $a = ne$ und $b = me$ für gewisse natürliche Zahlen n, m , d.h. $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ ist rational. Dann hat $f(x) = \sin(nex) + \sin(mex)$ die Periode $\frac{2\pi}{e}$, denn $f(x + \frac{2\pi}{e}) = \sin(nex + 2\pi n) + \sin(mex + 2\pi m) = f(x)$.

Nun sei p eine Periode von f und $g(x) := f(x) + \frac{1}{b^2} f''(x) = (1 - \frac{a^2}{b^2}) \sin(ax)$. Dann hat g die (kleinste) Periode $\frac{2\pi}{a}$, aber mit f auch die Periode p ; es ist also $p = \frac{2\pi}{a} n$ ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{a}$. Analog ist $p = \frac{2\pi}{b} m$ ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{b}$. Damit sind a und b beide ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{p}$, also kommensurabel.

Aufgabe 19

a) Die Differenz benachbarter Frequenzen 524 Hz ist kein Teiler der Resonanzfrequenzen, daher ist die Pfeife gedackt (unten offen, oben geschlossen). Wegen $1310 = 5 \cdot 262$, $1834 = 7 \cdot 262$ und $2358 = 9 \cdot 262$ ist die Grundfrequenz $f_0 = 262$ Hz und es liegen die zweite/ dritte/ vierte Oberschwingung vor (3/4/5 Knoten, 3/4/5 Bäuche). Die effektive Länge der Pfeife ist $L = \frac{1}{4} \frac{c}{f_0} \approx 32$ cm.

b) (i) Wegen $c = \lambda f = 2L \cdot f$ (Grundschiwingung) sind Saitenlänge und Frequenz antiproportional, für die Frequenzen $a = \sqrt[12]{2}^2 \cdot 196 \text{ Hz} \approx 220 \text{ Hz}$, $h \approx 247 \text{ Hz}$, $c^1 \approx 262 \text{ Hz}$ braucht man also die Saitenlängen $\sqrt[12]{2}^{-2} \cdot 30 \text{ cm} \approx 26,7 \text{ cm}$, $23,8 \text{ cm}$, $22,5 \text{ cm}$ (gleichstufige Stimmung).

(ii) Es gilt $\frac{a_1}{a_2} = (\frac{f_2}{f_1})^2$, das Dichteverhältnis der Saiten $d^1 = \sqrt[12]{2}^7 \cdot 196 \text{ Hz} \approx 294 \text{ Hz}$, $a^1 \approx 440 \text{ Hz}$, $e^2 \approx 659 \text{ Hz}$ ist folglich $\sqrt[12]{2}^{-14} \approx 0,45$, $\sqrt[12]{2}^{-28} \approx 0,20$ und $\sqrt[12]{2}^{-42} \approx 0,09$.

(iii) Für $F_s = 90 \text{ N}$ ergibt sich die Liniendichte $\varrho = \frac{F_s}{f^2 \cdot 4L^2} \approx 3,6 \frac{\text{g}}{\text{m}}$.

c) Nach Vorlesung müssen dies zwei gegenläufige Wellen halber Amplitude und gleicher Frequenz sein: Für

$$y_1(x, t) = 0,01 \sin(40\pi t - \frac{\pi}{2}x), \quad y_2(x, t) = 0,01 \sin(40\pi t + \frac{\pi}{2}x)$$

gilt $y_1(x, t) + y_2(x, t) = y(x, t)$. Die Wellenlänge ist 4 m, die Frequenz 20 s. Die Knoten haben den Abstand 2 m (x -Term). Ist dies die fünfte Oberschwingung, so ist die Länge der Saite $6 \cdot 2 \text{ m} = 12 \text{ m}$.

Aufgabe 20

a) $y(t)$ hat sein erstes Minimum dort, wo das Argument $2\pi f_1 t = 2\pi(f + \frac{\Delta f}{n})t$ den Anteil $\frac{1}{n+1}$ einer Periode vor $2\pi f_0 t = 2\pi f t$ liegt, $2\pi f_2 t = 2\pi(f + 2\frac{\Delta f}{n})t$ den Anteil $\frac{2}{n+1}, \dots$ und $2\pi f_n t = 2\pi(f + \Delta f)t$ den Anteil $\frac{n+1}{n+1}$ (eine ganze Periode) vor $2\pi f t$ liegt. Zu diesem Zeitpunkt $t = \Delta t$ gilt also $2\pi \frac{\Delta f}{n} \Delta t = \frac{2\pi}{n+1}$.

b) Aus a) folgt $\Delta f \Delta t = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.

c) In dieser Zeit werden $20 \text{ ms} \cdot 440 \text{ Hz} = 8,8$ Wellenlängen emittiert, das Wellenpaket ist $8,8 \cdot \frac{c}{f} \approx 6,8 \text{ m}$ lang. Nach b) ist $\Delta f = \frac{1}{\Delta t} = 50 \text{ Hz}$ und man hört einen Ton im Frequenzbereich 415 Hz bis 465 Hz.