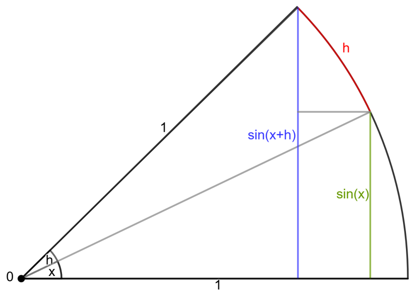
**Mathematik und Musik**
Schnupperkurs 2025
Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

# Übungsblatt 1

## Aufgabe 4

a) Begründen Sie die Ableitungsregeln $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$ am Einheitskreis.




*Hinweis:* Der rote Kreisbogen hat Länge $h$ (im Bogenmaß). Nähern Sie ihn durch eine Gerade.
b) Berechnen Sie das Polynom $p$ vierten Grades so, dass gilt:

$$p^{(k)}(0) = \cos^{(k)}(0) \text{ für } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

c) Lösen Sie Aufgabenteil b) mit dem Sinus anstelle des Kosinus.

## Aufgabe 5

Informieren Sie sich über den **Binomischen Lehrsatz** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ und seinen Zusammenhang mit den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ im **Pascalschen Dreieck**.
a) Folgern Sie aus dem Binomischen Lehrsatz die Formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

b) Beweisen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes die Ableitungsregel $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n = 0, 1, \dots$
c) Begründen Sie die Formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}, \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0, \qquad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

## Aufgabe 6

a) Beweisen Sie die Regel von der **logarithmischen Ableitung**: Ist $f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) \neq 0$, so gilt

$$\frac{(f_1 \ldots f_n)'(x)}{f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \ldots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

b) Zeigen Sie: In a) ist $\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2}$ genau dann, wenn $f_1 = Cf_2$ für eine Konstante $C$ gilt.

## Aufgabe 7

a) Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = x \log x - x, \qquad f_2(x) = x^4 e^{2x+3},$$

$$f_3(x) = \log \sqrt{1 + \cos^2 x}, \qquad f_4(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$f_5(x) = \sqrt{e^{\sin \sqrt{x}}}, \qquad f_6(x) = (1 + x^2)^{\sin x}.$$

b) Beweisen Sie: Für die $n$-te Ableitung eines Produktes $f(x)g(x)$ gilt die **Leibniz-Regel**

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

*Hinweis:* Pascalsches Dreieck, siehe Aufgabe 5.
c) Bestimmen Sie die eintausendste Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 e^x$.

**Aufgabe 8**
Die Funktion $f(x) = e^{\lambda x}$ löst die **Differentialgleichung** $f' = \lambda f$, denn es gilt $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x)$.
a) Zeigen Sie: *Jede* Lösung der Differentialgleichung $f' = \lambda f$ ist von der Form $f(x) = Ce^{\lambda x}$ für eine Konstante $C$. *Hinweis:* Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)e^{-\lambda x}\right)$.
b) Zeigen Sie: Für jede Konstante $C$ ist die Funktion

$$f(x) = \frac{\gamma}{\tau + Ce^{-\gamma x}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $f' = \gamma f - \tau f^2$ (*Logistisches Wachstum*).
c) Nach dem Weber-Fechner-Gesetz ist die Zunahme einer Reizempfindung $E$ umso geringer, je größer die Reizintensität $I$ ist, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}I} = \frac{\alpha}{I}$$

mit einer Konstanten $\alpha$. Finden Sie eine Lösung $E(I)$ dieser Differentialgleichung, die der Anfangsbedingung $E(I_0) = 0$ mit der *Wahrnehmungsschwelle* $I_0$ genügt.

**Aufgabe 9**
a) Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ die folgende partielle Differentialgleichung löst:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

c) Im Modell eines idealen Gases sind Druck $p$, Volumen $V$ und Temperatur $T$ durch die Zustandsgleichung $pV = cT$ mit einer Konstanten $c$ verknüpft. Zeigen Sie den Zusammenhang

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial V} = -1.$$

**Aufgabe 10**
a) Während ein Erreger bei $x = 0$ in 12 Sekunden 3 Schwingungen ausführt, breitet sich die Störung um 9 cm entlang der $x$-Achse aus.
  (i) Berechnen Sie Wellenlänge, Frequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
  (ii) Stellen Sie die Schwingungsgleichungen $y(x, t)$ an den Orten $x = 0$ und $x = 7{,}5$ cm auf.
  (iii) Skizzieren Sie ein Momentanbild der Welle und bestimmen Sie alle Orte maximaler Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 6$ s.
b) Beziehen Sie die folgenden Aufgabenteile auf Töne der Frequenz 1000 Hz.
  (i) Der Mensch kann eine Lautstärkeänderung von 1 Phon gerade noch wahrnehmen. Welcher prozentualen Änderung der Schallintensität entspricht das?
  (ii) Bei einem Patienten wird eine Hörminderung des rechten gegenüber dem linken Ohr von 20 dB festgestellt. Wo liegt die Hörschwelle des Schalldrucks am geschädigten Ohr?
  (iii) Zwischen den Amplituden des Schalldrucks $p$ und der Auslenkung der Luftmoleküle $y$ besteht die Beziehung

$$p = 2\pi f c \varrho y,$$

wobei $\varrho = 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$ die Dichte der Luft bezeichnet. Berechnen Sie die Amplituden der Auslenkung und der Schnelle der Luftmoleküle an der Hörschwelle und an der Schmerzgrenze.

c) In den folgenden Aufgaben ist der Kammerton $a^1 = 440\,\text{Hz}$.
   (i) Welches Frequenzverhältnis gehört zur Quinte (700 Cent)? Welches musikalische Intervall gehört zum Frequenzverhältnis $4:3$?
   (ii) Zeigen Sie, dass das Frequenzverhältnis eines (gleichstufigen) Halbtons $q = \sqrt[12]{2}$ ist. Wieviel größer ist der reine Halbton (ca. 112 Cent)?
   (iii) Zwischen zwei Tönen liegen zwei Quinten. Wie viel Cent entspricht das? Welchem Frequenzverhältnis entspricht das?
   (iv) Kennen Sie diese Melodie?

262 523 494 392 440 494 523 Hz

**Aufgabe 11**

Wenn sich zwei Töne $y_j(t) = A\sin(2\pi f_j t)$ mit gleicher Amplitude, aber verschiedenen Frequenzen $f_1$ und $f_2$ überlagern, hört man eine **Schwebung**.

a) Zeigen Sie, dass das Ergebnis der Überlagerung $y_1 + y_2$ ein Ton der Frequenz $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ist, dessen Amplitude mit der *Schwebungsfrequenz* $f_1 - f_2$ variiert.
b) Was passiert bei $f_1 = f_2$? Was passiert, wenn sich $f_1$ und $f_2$ nur wenig unterscheiden?

Schwebungen können zum Stimmen von Instrumenten genutzt werden: Ein Ton sei gegenüber dem Referenzton $h^2 = 990\,\text{Hz}$ so verstimmt, dass in 6 Sekunden 10 Schwebungen hörbar sind.

c) Welche Frequenzen kann der verstimmte Ton haben? Wie groß ist die Verstimmung in Cent?
d) Welche Zeit und wie viele Schwingungen liegen zwischen zwei Amplitudenminima? Welche Länge hat das Wellenpaket der Schwebung?

**Die Aufgaben können bis zum 14.05.25 digital an uwnkv@student.kit.edu zur Korrektur abgegeben werden.**