Karlsruher Institut für Technologie

Mathematik und Musik

Schnupperkurs 2025

Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

Übungsblatt 1 – Lösungshinweise

Aufgabe 4

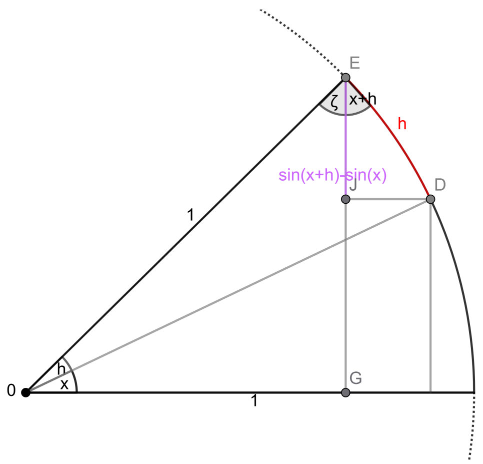
a) $x + h + \zeta = 90°$ (ΔOGE) und $\angle OED = 90°$ (Tangente), daher sind die Winkel wie im Bild. Mit dem Hinweis ist im Dreieck JDE

$$\cos(x+h) = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}.$$

Für $h \to 0$ ergibt sich rechts $(\sin(x))'$ und links $\cos x$. Für $(\cos(x))' = -\sin x$ beachte $|\overline{JD}| = \cos(x) - \cos(x+h)$.

b) $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ (Starte mit $k = 4$).

c) $p(x) = x - \frac{x^3}{6}$.



Aufgabe 5

a) Wähle $a = x, b = 1$, dann $a = b = 1$, dann $a = -b = 1$ im binomischen Lehrsatz.

b) $\frac{1}{h}\left((x+h)^n - x^n\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}$. Für $h \to 0$ verschwinden alle Terme außer $k = 1$.

c) Ableiten der ersten Formel in a) ergibt $n(x+1)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$, setze hier $x = 1$ und $x = -1$. Die letzte Formel ergibt sich aus zweimaligem Ableiten und der Wahl $x = 1$.

Aufgabe 6

a) Mehrfache Anwendung der Produktregel ergibt

$$(f_1 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 (f_2 \dots f_n)' = \dots = f_1' f_2 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n',$$

nun dividiere durch $f_1 \dots f_n \neq 0$.

b) Aus $f_1 = C f_2$ folgt sofort $f_1' = C f_2'$ und daher $\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2}$. Umgekehrt folgt aus $\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2}$ zunächst $f_1' f_2 - f_1 f_2' = 0$. Wegen der Quotientenregel bedeutet das $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = 0$, also $\frac{f_1}{f_2} = C$.

Aufgabe 7

a)

$$f_1'(x) = \log x, \qquad f_4'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$f_2'(x) = e^{2x+3}\left(4x^3 + 2x^4\right), \qquad f_5'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x},$$

$$f_3'(x) = \frac{-\cos x \sin x}{1 + \cos^2 x}, \qquad f_6'(x) = (1+x^2)^{\sin x}\left(\frac{2x \sin x}{1+x^2} + \log(1+x^2)\cos x\right).$$

b) Schreibe die Ableitungen $(fg)', (fg)'', (fg)^{(3)}, \dots$ systematisch untereinander und vergleiche die Struktur mit dem Pascalschen Dreieck. In der n-ten Zeile steht der Koeffizient $\binom{n}{k}$ dort, wo k der n Ableitungen auf f entfielen (Vergleiche mit dem Binomischen Lehrsatz).

c) $\left(x^2 e^x\right)^{(1000)} \overset{b)}{=} \left(x^2 + 2000x + 999000\right) e^x$.

Aufgabe 8

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)e^{-\lambda x}\right) = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x) e^{-\lambda x} = \left(f'(x) - \lambda f(x)\right) e^{-\lambda x} = 0$ und daher $f(x)e^{-\lambda x} = C$.

b)

$$f'(x) = \frac{C\gamma^2 e^{-\gamma x}}{(\tau + Ce^{-\gamma x})^2} = \gamma f(x) - \tau f(x)^2.$$

c) Für jede Konstante C erfüllt $E(I) = \alpha \log(I) + C$ die Gleichung $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}I} = \frac{\alpha}{I}$. Aus $E(I_0) = 0$ folgt $C = -\alpha \log(I_0)$, also $E(I) = \alpha \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$: Die Empfindung nimmt *logarithmisch* mit der Intensität zu. (In der Aufgabe wurde fälschlicherweise $E(0) = I_0$ gefordert.)

Aufgabe 9

a)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = \left(2x + x^2 y + y^3\right) e^{xy},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y,x) = \left(x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2\right) e^{xy},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \left(3x^2 + 3y^2 + x^3 y + xy^3\right) e^{xy}.$$

b) Berechne $f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, $\partial_x f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $\partial_x^2 f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Vertauschen von x und y ergibt $\partial_y^2 f(x,y) = -\partial_x^2 f(x,y)$.

c) $V = \frac{cT}{p}$, also $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{c}{p}$, analog auch $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{c}$ und $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{cT}{V^2}$. Das Produkt ist gleich $-\frac{cT}{pV} = -1$.

Aufgabe 10

a) (i) $\lambda = 3\,\mathrm{cm}, f = 0{,}25\,\mathrm{Hz}, c = 0{,}75\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$.

(ii) $y(0,t) = A\sin(0{,}25\,\mathrm{Hz}\cdot 2\pi t)$ für $t \geqslant 0$. Da die Welle den Ort $x = 7{,}5\,\mathrm{cm}$ zur Zeit $t = 10\,\mathrm{s}$ erreicht, ist $y(7{,}5\,\mathrm{cm},t) = A\sin\left(0{,}25\,\mathrm{Hz}\cdot 2\pi t - \frac{2\pi}{3\,\mathrm{cm}}\cdot 7{,}5\,\mathrm{cm}\right) = -A\sin\left(0{,}25\,\mathrm{Hz}\cdot 2\pi t\right)$ für $t \geqslant 10\,\mathrm{s}$ und zuvor $y(7{,}5\,\mathrm{cm},t) = 0$.

(iii) Da sich die Welle in 6 s bis $x = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ ausbreitet, ist $y(x, 6\,\mathrm{s}) = A\sin\left(0{,}25\,\mathrm{Hz}\cdot 2\pi\cdot 6\,\mathrm{s} - \frac{2\pi}{3\,\mathrm{cm}}x\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{3\,\mathrm{cm}}x\right)$ für $0 \leqslant x \leqslant 4{,}5\,\mathrm{cm}$ und an allen anderen Orten $y(x,6\,\mathrm{s}) = 0$. Die Orte maximaler Auslenkung liegen folglich bei $x = 0{,}75\,\mathrm{cm}, x = 2{,}25\,\mathrm{cm}$ und $x = 3{,}75\,\mathrm{cm}$.

b) (i) $10\log_{10}\left(\frac{I'}{I}\right)\,\mathrm{dB} = 1\,\mathrm{dB}$, d.h. $\frac{I'}{I} = 10^{0,1} \approx 1{,}26$ oder eine Änderung um ca. 26%.

(ii) 20 dB entsprechen einer Verzehnfachung des Schalldrucks, also $p = 10p_0 = 200\,\mu\mathrm{Pa}$.

(iii) Wegen $I \sim p^2$ ist die Amplitude des Schalldrucks an der Schmerzgrenze $p = \sqrt{\frac{I}{I_0}}p_0 = 10^{6,5}\cdot 20\,\mu\mathrm{Pa} \approx 63\,\mathrm{Pa}$. Einsetzen ergibt Amplituden der Auslenkung der Luftmoleküle von $y \approx 7{,}8\,\mathrm{pm}$ und $y \approx 25\,\mu\mathrm{m}$. Die Amplituden der Schnelle v erhält man durch Ableiten der Schwingungsgleichung nach der Zeit zu $v = 2\pi f y \approx 49\,\frac{\mathrm{nm}}{s}$ und $v \approx 157\,\frac{\mathrm{mm}}{s}$.

c) (i) Quinte: $2^{\frac{7}{12}} \approx 1{,}498$. $1200\cdot\log_2(\frac{4}{3}) \approx 498$ Cent ≈ 5 Halbtöne, also die Quarte.

(ii) Der gleichstufige Halbton ist 100 Cent groß, also $q = 2^{\frac{100}{1200}} = \sqrt[12]{2}$. Er ist etwa 12 Cent (ein Sechszehntelton) kleiner als der reine Halbton.

(iii) $700 + 700 = 1400$ Cent, das entspricht nach (i) dem Frequenzverhältnis $(1{,}498)^2 \approx 2{,}245$.

(iv) Die Intervalle zum Kammerton $440\,\mathrm{Hz} = a^1$ sind ca. $-900, 300, 200, -200, 0, 200, 300$ Cent groß, das entspricht den Tönen $c^1, c^2, h^1, g^1, a^1, h^1, c^2$.

Aufgabe 11

a) Mit Additionstheorem $y_1(t) + y_2(t) = 2A\sin\left(2\pi\frac{f_1+f_2}{2}t\right)\cos\left(2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t\right)$. Die Amplitude variiert (langsam) mit dem Kosinus-Term; da das Ohr positive und negative Amplituden nicht unterscheiden kann, hören wir die Variation mit der doppelten Frequenz $f_1 - f_2$.

b) Für $f_1 = f_2$ ist $y_1 + y_2 = 2y_1$ derselbe Ton höherer Lautstärke. Für eine kleine Differenz $f_1 - f_2 = \varepsilon$ ist $y_1(t) + y_2(t) = 2A\sin\left(2\pi(f_2 + \frac{\varepsilon}{2})t\right)\cos\left(2\pi\frac{\varepsilon}{2}t\right)$ ein Ton etwa der Frequenz $f_1 \approx f_2$, dessen Amplitude sehr langsam variiert.

c) $|990\,\mathrm{Hz} - f| = \frac{10}{6}\,\mathrm{Hz}$, also $f = 991{,}7\,\mathrm{Hz}$ oder $f = 988{,}3\,\mathrm{Hz}$; das entspricht 2,9 Cent.

d) Zwischen zwei Amplitudenminima liegen 0,6 s, das entspricht 594 Schwingungen; das zugehörige Wellenpaket hat eine Länge von 204 m.