Karlsruher Institut für Technologie

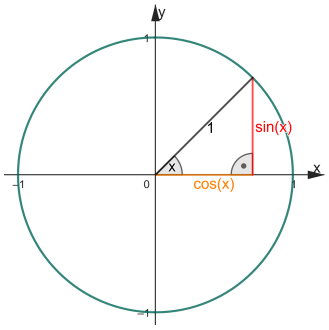
Mathematik und Musik
Schnupperkurs 2025
Kim Burgstahler, Wolf Wechinger

Übungen zur Vorbereitung

Aufgabe 1
Informieren Sie sich ausführlich zu den **trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus**. Sie können die folgende Aufzählung als Anleitung verwenden, indem sie die einzelnen Eigenschaften nachvollziehen und begründen.

- Für Winkel $x \in [0, 2\pi]$ (im Bogenmaß) finden sich $\sin x$ und $\cos x$ als Kathetenlängen eines Dreiecks im Einheitskreis wieder. Daher gilt der „trigonometrische Pythagoras“ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1.$$



- Wichtige Funktionswerte zeigt die folgende Tabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

- Es gelten die Zusammenhänge

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x,$$

  womit sich weitere Funktionswerte berechnen lassen.

- Der Sinus ist **ungerade** und der Kosinus **gerade**, d.h. $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$.

- Es gelten die **Additionstheoreme**

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

  und daher insbesondere die Formeln

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos x), \qquad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos x).$$

- Sinus und Kosinus werden zu 2π-periodischen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ und $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ fortgesetzt. Für die Nullstellen gilt

$$\sin x = 0 \text{ genau dann, wenn } x = k\pi \text{ für eine ganze Zahl } k,$$
$$\cos x = 0 \text{ genau dann, wenn } x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ für eine ganze Zahl } k.$$

- Die skalierten Funktionen $f(x) := \sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right)$ und $g(x) := \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right)$ haben die Periode p.

Aufgabe 2

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $g(x) := af(bx + c) + d$. Wie hängen die Graphen von f und g zusammen? Unterscheiden Sie verschiedene Fälle für die Zahlen a, b, c, d.

b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

$$f_1 : [-2, 8] \to \mathbb{R}, f_1(x) = -\sqrt{25 - (x-3)^2}, \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = |2(x+2)^2 - 1|,$$
$$f_3 : \mathbb{R} \to (0, \infty), f_3(x) = 2^{-(|x|+3)}, \qquad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_4(x) = 2\sin(1 - \pi x),$$
$$f_5 : (-\infty, 4) \to \mathbb{R}, f_5(x) = \log(16 - 2^x), \qquad f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_6(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Aufgabe 3

Für Summen mit vielen oder unbestimmt vielen Summanden verwendet man das **Summenzeichen** $\sum$. Eine *Zählvariable* (zum Beispiel i) nummeriert die einzelnen Summanden, man schreibt ihre Startzahl unter und ihre Endzahl über das Summenzeichen: $\sum_{i=1}^{4}$ nummeriert vier Summanden mit den Nummern $1, 2, 3, 4$, das Symbol $\sum_{i=-1}^{2}$ nummeriert ebenfalls vier Summanden mit den Nummern $-1, 0, 1, 2$. Hinter dem Summenzeichen steht eine Funktion von i, also ein Term a_i, mit dem sich für jeden Wert von i der i-te Summand berechnen lässt. Alle berechneten Summanden werden addiert. So ist zum Beispiel

$$\sum_{i=1}^{4} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 = 20, \qquad \sum_{i=-1}^{2} i^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 6.$$

Nummeriert man die ersten vier geraden Zahlen mit $i = 0$ bis 3, so ist ebenfalls

$$\sum_{i=1}^{4} 2i = \sum_{i=0}^{3} 2(i+1) = 2 + 4 + 6 + 8 = 20.$$

Solche *Indexverschiebungen* sind meist nützlich, wenn mehrere Summen aufeinander treffen. Auch der Name der Zählvariable ist egal, zum Beispiel $\sum_{i=1}^{4} 2i = \sum_{k=1}^{4} 2k$. Für Summenzeichen gelten die üblichen Rechenregeln der Addition:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i), \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j.$$

a) Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$\sum_{k=1}^{4} 3^{4-k} 2^k, \qquad \sum_{i=1}^{10} 3, \qquad \sum_{j=1}^{999} \frac{1}{j(j+1)}. \text{ (d1) hilft)}$$

b) Schreiben Sie mithilfe des Summenzeichens:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}, \qquad -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8}.$$

c1) Bestimmen Sie die Summe der ersten eintausend natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, 1000$.

c2) Finden Sie eine Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

c3) Finden Sie eine Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

d1) Vereinfachen Sie die **Teleskopsummen**

$$\sum_{i=p}^{n}(a_i - a_{i-1}), \qquad \sum_{i=p}^{n}(a_i - a_{i+1}).$$

d2) Zeigen Sie für $q \neq 1$ die **geometrische Summenformel**

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Hinweis: Multiplizieren Sie mit $1 - q$.
d3) Berechnen Sie die Doppelsumme

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^{j+k}}.$$

e) Beweisen Sie die Regel von der **partiellen Summation**: Sind Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ gegeben, so gilt für jede Zahl b_{n+1}:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}),$$

wobei $A_k := \sum_{i=1}^{k} a_i$. *Hinweis:* Schreiben Sie $a_k = A_k - A_{k-1}$.

Die Aufgaben können bis zum 29.04.25 digital an uwnkv@student.kit.edu zur Korrektur abgegeben werden.