

Vorkurs Mathematik

2. Mengenlehre

ABTEILUNG FÜR DIDAKTIK



Definition 2.1

Eine **Menge** ist (nach Georg Cantor) „die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“ Die Objekte, die zu einer Menge gehören, heißen die **Elemente** dieser Menge.

Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt die **leere Menge** \emptyset oder $\{\}$. Ist x ein Element der Menge M , so schreibt man $x \in M$ (lies: „ x Element M “ oder „ x in M “), andernfalls $x \notin M$.

Die Anzahl der Elemente einer (endlichen) Menge M heißt die **Mächtigkeit** oder Kardinalität von M und wird mit $\#M$ bezeichnet. Haben zwei (endliche) Mengen M, N die gleiche Mächtigkeit $\#M = \#N$, so nennt man M und N **gleichmächtig**.

Beispiel 2.2

Es gibt zwei Methoden, um eine Menge anzugeben: *Aufzählend* und mithilfe einer *Aussageform*.

- 1 Fasst man die Objekte 1, 2, 3 in einer Menge zusammen, so schreibt man $\{1, 2, 3\}$; es ist also $1 \in \{1, 2, 3\}$, $4 \notin \{1, 2, 3\}$. Es ist $1 \neq \{1\}$. Gleiche oder mehrfach vorkommende Elemente einer Menge werden nicht unterschieden, auch kommt es nicht auf die Reihenfolge an:

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 1, 1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 1, \sqrt{2}^2, 9 - 7\}.$$

Die Kardinalität all dieser Mengen ist $\#\{1, 2, 3\} = 3$. In der Regel bedeutet $\{a, b, c\}$ daher, dass die Elemente a, b, c *paarweise verschieden* sind.

- 2 Mengen können nicht nur Zahlen enthalten: $\{\Delta, \diamond, \square\}$ eine Menge geometrischer Figuren und gleichmächtig zu $\{1, 2, 3\}$. Eine Gerade ist eine Menge von Punkten bzw. Vektoren $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{v}$, ebenso eine Ebene. Die Menge der Stammfunktionen von $f(x) = 2x$ ist $\{g(x) = x^2 + C : C \in \mathbb{R}\}$. Mengen können wiederum Mengen enthalten:

$$1 \in \{1, \{2\}\}, \quad 2 \notin \{1, \{2\}\} \quad \{1\} \notin \{1, \{2\}\}, \quad \{2\} \in \{1, \{2\}\}.$$

Für leere Menge \emptyset gilt immer $x \notin \emptyset$ und $\#\emptyset = 0$, hingegen ist $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ und $\#\{\emptyset\} = 1$. Obwohl jede der Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ unendlich ist, ist $\#\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\} = 4$ endlich.

- 3 Schreibweisen wie $\{1, \dots, 101\}$ oder $\{2, 4, 6, \dots\}$ können unpräzise sein. Stattdessen verwendet man eine *Aussageform*:

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\}.$$

Die Elemente n der **Grundmenge** \mathbb{N} werden durch die Aussageform „ n ist gerade“ eingeschränkt bzw. ausgewählt. So ist $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 101\} = \{1, \dots, 101\}$.

- 4 Allgemeiner sei $A(x)$ ein Aussageform. Dann enthält die Menge $\{x : A(x)\}$ genau die Elemente y , für die $A(y)$ wahr ist:

$$y \in \{x : A(x)\} \Leftrightarrow A(y) \text{ ist wahr.}$$

Überprüft man $A(x)$ nur für Elemente einer **Grundmenge** G , so schreibt man $\{x \in G : A(x)\}$. Natürlich ist $\{x : A(x)\} = \{y : A(y)\}$.

- 5 Die Gleichung $2x + 7 = 9$ hat die **Lösungsmenge** $\mathcal{L} = \{x : 2x + 7 = 9\}$:

$$x \in \{x : 2x + 7 = 9\} \Leftrightarrow 2x + 7 = 9 \text{ ist wahr.}$$

Sucht man nach Lösungen in der Grundmenge \mathbb{R} , so ist $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 7 = 9\}$.

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \quad \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\},$$

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2\} = \emptyset, \quad \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 1\} = \{1\}.$$

Eine Menge kann leer, *endlich* oder *unendlich* sein, sich aufzählend mit „...“ oder auch nicht so beschreiben lassen: $\{x \in \mathbb{R} : (x - 3)^2 - x^2 = 9 - 6x\} = \mathbb{R}$.

- ⑥ Weitere Beispiele: a) Jede gerade Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist von der Form $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, daher ist

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \{2k : k \in \mathbb{N}\} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}.$$

- b) Eine Gerade im Raum wird beschrieben durch die Gleichung $g : \vec{x} = \vec{a} + s\vec{v}$, das bedeutet

$$g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \exists s \in \mathbb{R} : \vec{x} = \vec{a} + s\vec{v}\} = \{\vec{a} + s\vec{v} : s \in \mathbb{R}\}.$$

Entsprechend ist $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0\}$ eine Ebene mit Stützvektor \vec{a} und Normalenvektor \vec{n} .

- c) Würfelt man einmal mit einem sechsseitigen Würfel (W6), so heißen 1, 2, 3, 4, 5, 6 die *Ergebnisse* und $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der *Ergebnisraum* dieses Zufallsexperiments. Teilmengen des Ergebnisraums können als *Ereignisse* interpretiert werden:

$\{2, 4, 6\}$: Es wird eine gerade Zahl gewürfelt.

$\{4, 5, 6\}$: Es wird eine Zahl größer als 3 gewürfelt.

$\{2, 3, 5\}$: Es wird eine Primzahl gewürfelt.

Die Bildung von Mengen $\{x : A(x)\}$ funktioniert nicht für jede Aussageform $A(x)$. Bertrand Russell fand 1903 als Erster ein Beispiel, das zu einer Inkonsistenz führt (*Russellsches Paradoxon*): Sei

$$M := \{x : x \notin x\}.$$

Gilt dann $M \in M$? Wenn ja, dann hat M die Eigenschaft $M \notin M$, ein Widerspruch. Wenn nein, dann ist die Bedingung „ $x \notin x$ “ falsch für $x = M$ und es gilt $M \in M$, ebenfalls ein Widerspruch.

Eine Lösung dieses Problems schaffte die um 1930 entwickelte axiomatische Mengenlehre von Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel (**ZF-System**) mit einer sehr präzisen, aber auch sehr aufwendigen Definition des Begriffs *Menge*.

Definition 2.3

Zwei Mengen M, N heißen **gleich**, wenn sie dieselben Elemente haben: Es gilt $N = M$ genau dann, wenn

$$\forall x : x \in N \Leftrightarrow x \in M.$$

N heißt **Teilmenge** von M , wenn jedes Element von N auch Element von M ist: Es gilt $N \subseteq M$ (lies: „ N Teilmenge M “) genau dann, wenn

$$\forall x : x \in N \Rightarrow x \in M.$$

Dann nennt man auch M eine **Obermenge** von N .

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M) := \{N : N \subseteq M\}$ ist die Menge aller Teilmengen von M .

Ist $N \subseteq M$, aber $N \neq M$, so schreibt man auch $N \subsetneq M$ und nennt N eine **echte Teilmenge** von M . Das Symbol \subset wird uneinheitlich sowohl für \subseteq als auch für \subsetneq gebraucht.

- ① Es ist $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, denn

$$\forall x : x \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}.$$

Hier wäre „ \Leftarrow “ für $x = 3$ falsch, daher sind beide Mengen verschieden und $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$.
Es gilt

$$\forall x : x \in \{1, 2\} \Leftrightarrow x \in \{2, 1, 1, 2\}$$

und daher $\{1, 2\} = \{2, 1, 1, 2\}$; daran sieht man nochmal, dass Wiederholungen und die Reihenfolge der Elemente unerheblich sind.

- ② $\{A : A \text{ ist ein Quadrat}\} \subseteq \{A : A \text{ ist ein Rechteck}\}$. Da es Rechtecke gibt, die keine Quadrate sind, könnte man hier „ \subseteq “ durch „ \subsetneq “ ersetzen. Genauso sind folgende Inklusionen echt:

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N},$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ungerade}\} = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Allgemein gilt $\{x \in G : A(x)\} \subseteq G$.

Beispiel 2.4(3)

Die Gleichheit = zweier Mengen verwendet die Äquivalenz \Leftrightarrow , die Teilmengenrelation \subseteq verwendet die Implikation \Rightarrow ; damit kann man Aussagenlogik in die Mengenlehre übertragen:

$$\begin{aligned} N = M &\Leftrightarrow (\forall x : x \in N \Leftrightarrow x \in M) \\ &\Leftrightarrow (\forall x : x \in N \Rightarrow x \in M \text{ und } x \in M \Rightarrow x \in N) \\ &\Leftrightarrow (\forall x : x \in N \Rightarrow x \in M) \text{ und } (\forall x : x \in M \Rightarrow x \in N) \\ &\Leftrightarrow N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N. \end{aligned}$$

Man kann also die die Gleichheit $M = N$ in zwei Richtungen $M \subseteq N$ und $M \supseteq N$ zerlegen. Als Beispiel beweisen wir die Gleichheit

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

BEWEIS (siehe Skriptum)



Genauso gilt

$$\begin{aligned} N \not\subseteq M &\Leftrightarrow \exists x : x \in N \text{ und } x \notin M, \\ N \not= M &\Leftrightarrow \exists x : (x \in N \text{ und } x \notin M) \text{ oder } (x \in M \text{ und } x \notin N). \end{aligned}$$

Beispiel 2.4(4)

Statt $1 \in \mathbb{N}$ kann man $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$ schreiben; umgekehrt gilt $\{1\} \notin \mathbb{N}$, $1 \notin \mathbb{N}$. Auch alles zugleich kann richtig sein:

$$1 \in \{1, \{1\}\}, \quad \{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}, \quad \{1\} \in \{1, \{1\}\} \quad \{\{1\}\} \subseteq \{1, \{1\}\}.$$

Alle Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ sind echt außer $A = \mathbb{N}$, $A \subsetneq \mathbb{N}$ schließt also nur den Fall $A = \mathbb{N}$ aus. „ \subsetneq “ ist eine stärkere Aussage als „ \subseteq “:

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ und } A \neq B.$$

Umgekehrt ist „ \subseteq “ eine schwächere Aussage als „ \subsetneq “:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \subsetneq B \text{ oder } A = B.$$

Dasselbe gilt für die Symbole „ \leq “ und „ $<$ “: $a \leq b$ bedeutet $a < b$ oder $a = b$, aber $a < b$ bedeutet sowohl $a \leq b$ als auch $a \neq b$. Die Hierarchie zwischen den Teilmengenbeziehungen zeigt das Diagramm:

$$= \Rightarrow \subseteq \Leftarrow \subsetneq \Rightarrow \neq$$

- 5 Seien A, B endliche Mengen. Aus $A = B$ folgt $\#A = \#B$, d.h. A, B sind gleichmächtig; die Umkehrung dieser Aussage gilt offenbar nicht. Aus $A \subseteq B$ folgt entsprechend $\#A \leq \#B$. Folgt aus $A \subsetneq B$ auch $\#A < \#B$? Ja für endliche Mengen, aber Nein für unendliche Mengen. Georg Cantor zeigte mit zwei Diagonalargumenten: Es gilt zwar $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, aber

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q},$$

$$\#\mathbb{N} \neq \#\mathbb{R}.$$

Es gibt also *verschiedene* unendliche Mächtigkeiten.

- 6 Für die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ gilt $N \in \mathcal{P}(M) \Leftrightarrow N \subseteq M$. $\mathcal{P}(M)$ ist ein *Mengensystem* und für große Mengen M schnell unübersichtlich, zum Beispiel ist

$$\mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\},$$

$$\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Stets gilt $M \subseteq M$ und $\emptyset \subseteq M$, also $M \in \mathcal{P}(M)$ und $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$. Im Spezialfall $M = \emptyset$ ist $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Ist M endlich, so gibt es nur endlich viele Teilmengen von M , nämlich

$$\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}.$$

Für unendliche Mengen ist die Situation komplexer, zum Beispiel $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R}$.

Definition 2.5

Wir kennen bereits die Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} .

Alle (reellen) Zahlen lassen sich auf der **Zahlengeraden** der Größe nach anordnen. Zusammenhängende Abschnitte der Zahlengeraden heißen **Intervalle**, man unterscheidet ($a, b \in \mathbb{R}$)

- **Offene** Intervalle

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

- **Abgeschlossene** Intervalle

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.$$

- **Halboffene** Intervalle

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Definition 2.5

Weitere Sprech- und Schreibweisen sind üblich:

- Gilt $a < b$ für die **Intervallgrenzen** a, b , so heißt das Intervall **echt**, im Fall $a \geq b$ **unecht**. Unechte Intervalle sind leer außer $[a, a] = \{a\}$.
- Die Intervalle (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ heißen **beschränkt**, $[a, b]$ auch **kompakt**; alle anderen Intervalle heißen **unbeschränkt**. Die **Länge** echter beschränkter Intervalle ist $|I| := b - a$, bei unechten Intervallen $|I| := 0$.
- Das leere Intervall $I = \emptyset$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen, genauso auch der Sonderfall $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$. Ein Intervall der Form $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ heißt auch **ε -Umgebung** von a .

Satz 2.6

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt folgende Charakterisierung:

$$I \text{ ist ein Intervall} \Leftrightarrow \forall x, y \in I \forall z \in \mathbb{R} : x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

Dies wird in der Analysis 1 bewiesen.

Alle Zahlenmengen entstehen durch *Zahlbereichserweiterungen*.

a) Ausgangspunkt sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0$, $0 \in \mathbb{N}_0$, $0 \notin \mathbb{N}$ und zum Beispiel $101 \in \mathbb{N}$, $-1 \notin \mathbb{N}_0$.

b) Erweiterung um die negativen Zahlen ergibt die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, \dots\}$. Wieder ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$ und zum Beispiel $0 \in \mathbb{Z}$, $15 \in \mathbb{Z}$, $-22 \in \mathbb{Z}$, aber $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ und $4,2 \notin \mathbb{Z}$.

c) Erweiterung um die Brüche bzw. die abbrechenden und periodischen Dezimalzahlen ergibt die rationalen Zahlen \mathbb{Q} . Wiederum ist $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ und zum Beispiel $0 \in \mathbb{Q}$, $-4 \in \mathbb{Q}$, $\frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$ und $-0,1 \in \mathbb{Q}$, aber $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, $\log 3 \notin \mathbb{Q}$, $e \notin \mathbb{Q}$.

d) Bei der letzten Erweiterung zu den reellen Zahlen \mathbb{R} werden *alle noch fehlenden* Zahlen ergänzt, das sind gerade die irrationalen Zahlen bzw. nicht periodischen, nicht abbrechenden Dezimalzahlen wie $\sqrt{2}$ oder π . Wieder ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, zusammengefasst

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Jede dieser Inklusionen ist echt.

- 2 Intervalle sind immer zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R} . Generell gilt: Runde/ offene/ ausschließende Klammern, leere Kreise oder gestrichelte Linien bedeuten, dass die Grenze *nicht* dazugehört; eckige/ abgeschlossene/ einschließende Klammern, ausgefüllte Kreise oder durchgezogene Linien bedeuten entsprechend, dass die Grenze dazugehört. Zum Beispiel ist $0 \notin (0, 1)$, $0 \in [0, 1]$, aber in beiden Fällen $\frac{1}{2} \in (0, 1)$, $\frac{1}{2} \in [0, 1]$. Offensichtlich gilt

$$(a, b) \subseteq (a, b] \subseteq [a, b], \quad (a, b) \subseteq [a, b] \subseteq [a, b].$$

Die Grenzen $-\infty, \infty$ sind rein symbolisch zu verstehen und *keine Zahlen*, dort steht immer eine ausschließende Klammer. Einige Beispiele:

$$\begin{aligned} (1, 2) &\subseteq (1, \infty) \subseteq [1, \infty), & [-1, 0) &\subseteq (-\infty, 0) \subseteq (-\infty, 0], \\ [1, 0) &\subseteq [1, \infty) \subseteq [-1, \infty), & (-\infty, -1] &\subseteq (-\infty, 0) \subseteq (-\infty, 1]. \end{aligned}$$

- 3 Alle Zahlenmengen sind selbst Mengen: $3 \in \mathbb{R}$, aber $3 \notin \{\mathbb{R}\}$, $\mathbb{R} \neq \{\mathbb{R}\}$.
 $\mathbb{R}_+ := (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ ist die Menge der positiven Zahlen; entsprechend ist
 $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ die Menge der negativen Zahlen.
Auf der Zahlengeraden gegenüber liegen die nichtpositiven Zahlen
 $(-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ bzw. die nichtnegativen Zahlen $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Definition 2.8

Seien M, N Mengen. Die **Schnittmenge** $M \cap N$ (lies: „ M geschnitten N “) enthält alle Elemente, die sowohl in M als auch in N liegen:

$$M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

Gibt es keine gemeinsamen Elemente, also $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N **disjunkt**. Die **Vereinigungsmenge** $M \cup N$ (lies: „ M vereinigt N “) enthält alle Elemente, die in M oder in N liegen:

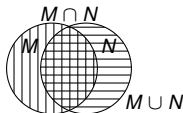
$$M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

Im Zusammenhang zur Aussagenlogik gilt

$$x \in M \cap N \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N,$$

$$x \in M \cup N \Leftrightarrow x \in M \vee x \in N.$$

Man kann Mengenbeziehungen häufig gut in einem *Venn-Diagramm* veranschaulichen:



Beispiel 2.9

- ① a) Es gilt $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 4\} = \{1, 2\}$ und $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
b) Es ist zum Beispiel

$$\{A : A \text{ ist Rechteck}\} \cap \{A : A \text{ ist Raute}\} = \{A : A \text{ ist Quadrat}\}$$

und $\{\Delta : \Delta \text{ ist rechtwinklig}\} \cap \{\Delta : \Delta \text{ ist gleichseitig}\} = \emptyset$, diese Mengen sind disjunkt.

c) Stets ist $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$, die leere Menge also disjunkt zu jeder Menge. Eine Formulierung wie „ A, B, C sind disjunkt“ ist unklar, denn es gibt Mengen A, B, C , sodass

$$A \cap B \cap C = \emptyset, \text{ aber } A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset, C \cap A \neq \emptyset.$$

Mit „ A, B, C sind paarweise disjunkt“ meint man tatsächlich $A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset, C \cap A = \emptyset$.

- ② „ $x \in A \cap B$ “ ist eine stärkere Aussage als „ $x \in A$ “, es gilt stets $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$. Zum Beispiel ist

$$\mathbb{P} \cap \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ungerade}\} = \{n \in \mathbb{P} : n \text{ ist ungerade}\} \subseteq \mathbb{P}.$$

Genauso ist „ $x \in A \cup B$ “ schwächer als „ $x \in A$ “, also stets $A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq A \cup B$. In beiden Fällen gilt Gleichheit genau dann, wenn $A \subseteq B$ (Satz 2.11). Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \cup \{0\} &= \mathbb{N}_0, & [1, 2] \cup (2, 3] &= [1, 3], & (-1, 3) \cap [0, 5] &= [0, 3), \\ \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} &= \mathbb{Q}, & (-\infty, -1) \cup (-2, 0] &= (-\infty, 0], & (-\infty, 1) \cap [-1, \infty) &= [-1, 1). \end{aligned}$$

- Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems

$$3x^2 + 5 = 8,$$

$$5 - 2x = 7$$

ist der Durchschnitt $\mathcal{L} = \{x : 3x^2 + 5 = 8\} \cap \{x : 5 - 2x = 7\}$. Umgekehrt ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x - 2)(x + 1) = 0$ die Vereinigung

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{x : (x - 2)(x + 1) = 0\} = \{x : x - 2 = 0\} \cup \{x : x + 1 = 0\} \\ &= \{2\} \cup \{-1\} = \{2, -1\}.\end{aligned}$$

- Sind A, B endlich, so auch $A \cap B$ und $A \cup B$; aus $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ folgt $\#(A \cap B) \leq \#A \leq \#(A \cup B)$. Abzählen führt auf die Formel

$$\#A + \#B = \#(A \cup B) + \#(A \cap B),$$

die zum Beispiel in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nützlich ist (siehe Skriptum).

Satz 2.10

Seien A, B, C Mengen. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- 1 $A \cap B = B \cap A$. (**Kommutativgesetz** für \cap)
- 2 $A \cup B = B \cup A$. (**Kommutativgesetz** für \cup)
- 3 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. (**Assoziativgesetz** für \cap)
- 4 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (**Assoziativgesetz** für \cup)
- 5 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (Erstes **Distributivgesetz**)
- 6 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. (Zweites **Distributivgesetz**)

BEWEIS Die Aussagen können elementweise in die Aussagenlogik übersetzt werden, zum Beispiel

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A.$$

Daraus folgt $A \cap B = B \cap A$; genauso zeigt man auch die übrigen Aussagen. □

Analog zu \wedge und \vee erlaubt das Assoziativgesetz, auch in mehrfachen Schnitten und Vereinigungen die Klammern wegzulassen:

$$x \in A_1 \cap \dots \cap A_n \Leftrightarrow x \in A_1 \wedge \dots \wedge x \in A_n,$$

$$x \in A_1 \cup \dots \cup A_n \Leftrightarrow x \in A_1 \vee \dots \vee x \in A_n.$$

Auch unendliche Schnitte und Vereinigungen sind möglich:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (-1, 1) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cap \dots = \{0\}, \quad \bigcap_{b>1} [0, b] = [0, 1],$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = \{1\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right] \cup \dots = (0, 1], \quad \bigcup_{a>0} (-a, a) = \mathbb{R}.$$

Auch hier gelten Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz. Für ein Mengensystem \mathcal{A} schreibt man gelegentlich

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A,$$

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$$

zum Beispiel $\bigcup \{(-a, a) : a > 0\} = \mathbb{R}$.

Satz 2.11

Seien A, B Mengen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1 $A \subseteq B$,
- 2 $A \cap B = A$,
- 3 $A \cup B = B$.

BEWEIS (siehe Skriptum)



Definition 2.12

Seien M, N Mengen. Die **Differenzmenge** $M \setminus N$ (lies: „ M ohne N “) enthält alle Elemente von M , die nicht in N liegen:

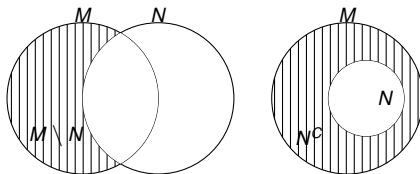
$$M \setminus N := \{x \in M : x \notin N\}.$$

Es gilt

$$\forall x : x \in M \setminus N \Leftrightarrow x \in M \text{ und } x \notin N.$$

Gilt zusätzlich $N \subseteq M$, so kann man M als **Grundmenge** interpretieren und nennt $N^C := M \setminus N$ (lies: „ N Komplement“) das **Komplement** von N in M . Man hat dann die einfachere Aussage

$$\forall x \in M : x \in N^C \Leftrightarrow x \notin N.$$



Beispiel 2.13(1)

a) $\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 3\} = \{2\}$; man kann dies als Komplement $\{1, 3\}^C = \{2\}$ in der Grundmenge $M = \{1, 2, 3\}$ interpretieren. Bei $\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 4\} = \{2, 3\}$ geht das nicht, da $\{1, 4\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$.

b) Das Komplement von $G = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$ in \mathbb{N} ist

$$G^C = \mathbb{N} \setminus G = \{n \in \mathbb{N} : n \notin G\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ungerade}\} = \{1, 3, 5, \dots\} =: U,$$

denn für $n \in \mathbb{N}$ ist $n \notin G \Leftrightarrow n \in U$. Beim Komplement in \mathbb{Z} kann $n \notin G$ hingegen auch $n \in \{0, -1, -2, \dots\}$ bedeuten, es ist

$$G^C = \mathbb{Z} \setminus G = \{n \in \mathbb{Z} : n \notin G\} = \{-n : n \in \mathbb{N}_0\} \cup U.$$

c) Das Komplement der Primzahlen \mathbb{P} in \mathbb{N} sind die zusammengesetzten Zahlen mit der Eins:

$$\mathbb{P}^C = \mathbb{N} \setminus \mathbb{P} = \{1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, \dots\}.$$

d) Das Komplement der positiven Zahlen $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ in \mathbb{R} sind die nichtpositiven Zahlen $(-\infty, 0]$; umkehrt ist $(-\infty, 0)^C = \mathbb{R} \setminus (-\infty, 0) = [0, \infty)$. Das Komplement eines beschränkten Intervalls ist kein Intervall mehr:

$$x \notin [2, 3] \Leftrightarrow \neg(2 \leq x < 3) \Leftrightarrow x < 2 \text{ oder } x \geq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup [3, \infty).$$

Häufig wird aus einer Grundmenge oder einem Definitionsbereich genau eine Zahl ausgeschlossen:

$$\{1\}^C = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

e) Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N} &= \{0\}, & \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} &= \emptyset, & [-1, 1] \setminus \{0\} &= [-1, 0) \cup (0, 1], \\ [-1, 0] \setminus \mathbb{Z} &= (-1, 0), & [1, \infty) \setminus [1, 2] &= (2, \infty), & (-\infty, 2) \setminus (-\infty, 1) &= [1, 2). \end{aligned}$$

- ② Für $M \setminus N$ sind nur die Elemente in $N \cap M \subseteq M$ relevant, man kann daher $M \setminus N$ stets als Komplement in der Grundmenge M auffassen:

$$M \setminus N = M \setminus (N \cap M) = (N \cap M)^C.$$

- ③ „ $x \in N \cap N^C$ “ ist nach dem Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch niemals wahr, daher ist $N \cap N^C = \emptyset$. Nach dem Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten gilt $N \cup N^C = M$, für endliche Mengen folgt daraus $\#M = \#N + \#N^C$. Ähnlich kann man auch andere Tautologien in die Mengenlehre übersetzen:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A^C \cap B = \emptyset,$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap C \subseteq B \text{ und } A \cap C^C \subseteq B.$$

Neben den Regeln in Satz 2.14 gelten im Allgemeinen keine Distributivgesetze zwischen \setminus und \cap bzw. \cup :

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = A \cap (C \setminus B),$$

$$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C).$$

Satz 2.14

Es seien A, B Teilmengen einer Grundmenge M . Dann gilt:

- 1 $(A^C)^C = A$.
- 2 $A \setminus B = A \cap B^C$.
- 3 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. (Erste **Regel von De Morgan**)
- 4 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$. (Zweite **Regel von De Morgan**)
- 5 $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$. (**Kontraposition**)
- 6 $A = B \Leftrightarrow A^C = B^C$.

BEWEIS Alle Aussagen sind Übersetzungen aus der Aussagenlogik. (1) folgt aus der doppelten Negation $\overline{\overline{A}} \leftrightarrow A$, (3) und (4) aus Regeln von De Morgan in Satz 1.17. (2) Für alle $x \in M$ gilt

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ und } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \text{ und } x \in B^C \Leftrightarrow x \in A \cap B^C.$$

(5) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow \forall x \in M : (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x \in M : (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in M : (x \in B^C \Rightarrow x \in A^C) \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort (6), denn $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

□

Auch die Regeln von De Morgan lassen sich auf mehrfache Durchschnitte und Vereinigungen verallgemeinern: Sind A_1, A_2, \dots Teilmengen einer Grundmenge M , so gilt

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C,$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^C.$$

Definition 2.15

Seien M, N Mengen, $x \in M$ und $y \in N$. Das Symbol (x, y) bezeichnet das **geordnete Paar** der Elemente x und y . Die Menge aller geordneten Paare heißt das **kartesische Produkt** $M \times N$ (lies: „ M Kreuz N “) von M und N :

$$M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}.$$

Es kommt auf die Reihenfolge an: Im Allgemeinen ist $(x, y) \neq (y, x)$ und $M \times N \neq N \times M$.

Entsprechend definiert man **Tripel** (x, y, z) , **Quadrupel** (w, x, y, z) oder allgemeiner **n -Tupel** (x_1, x_2, \dots, x_n) von Elementen aus Mengen M_1, \dots, M_n und das kartesische Produkt

$$M_1 \times \dots \times M_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n\}.$$

Für das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst schreibt man $M^2 := M \times M$, $M^3 := M \times M \times M$ und für n Faktoren entsprechend $M^n := M \times \dots \times M$.

Beispiel 2.16(1)

a) Das kartesische Produkt von $\{\square, \Delta\}$ und $\{1, 2, 3\}$ ist je nach Reihenfolge

$$\begin{aligned}\{\square, \Delta\} \times \{1, 2, 3\} &= \{(\square, 1), (\square, 2), (\square, 3), (\Delta, 1), (\Delta, 2), (\Delta, 3)\}, \\ \{1, 2, 3\} \times \{\square, \Delta\} &= \{(1, \square), (1, \Delta), (2, \square), (2, \Delta), (3, \square), (3, \Delta)\}.\end{aligned}$$

Die Mengen sind gleichmächtig, allgemein ist für endliche Mengen $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$.

b) Das bekannteste kartesische Produkt ist die **Ebene**

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

x, y heißen die **Koordinaten** des Punktes (x, y) , die x -Koordinate auch **Abszisse**, die y -Koordinate auch **Ordinate**. Zur Darstellung verwendet man häufig ein **kartesisches Koordinatensystem**.

Analog ist der dreidimensionale **Raum** $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

c) Das geordnete Paar (a, b) ist verschieden von der (ungeordneten) Menge $\{a, b\} = \{b, a\}$. Es gilt

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ und } b = d,$$

analog für n -Tupel; entsprechend gilt auch

$$A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \text{ und } B = D, \quad A \times B \subseteq C \times D \Leftrightarrow A \subseteq C \text{ und } B \subseteq D.$$

d) \mathbb{N}^2 beschreibt ein *Gitter* von Punkten mit Abstand 1 im ersten Quadranten,

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\} = \{(0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (2, 0), \dots\}$$

ein entsprechendes Gitter über dem gesamten Koordinatensystem. Für einen anderen Gitterabstand $a > 0$ verwendet man die Menge $(a\mathbb{Z})^2 = \{(ax, ay) : x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Beispiel 2.16

- ② Kartesische Produkte tauchen häufig bei Koordinatensystemen oder Diagrammen auf, zum Beispiel bei einer physikalischen Messung. Auch mehrstufige Zufallsexperimente können so modelliert werden: $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ ist der Ergebnisraum bei einem Wurf eines W6,

$$\Omega^{100} = \{1, \dots, 6\}^{100} = \{(x_1, \dots, x_{100}) : x_1, \dots, x_{100} \in \{1, \dots, 6\}\}$$

der Ergebnisraum bei 100 solchen Würfeln. Hierfür schreibt man auch

$$\{(x_1, \dots, x_{100}) : x_i \in \{1, \dots, 6\} \text{ für } i \in \{1, \dots, 100\}\} \text{ oder etwas unsauber}$$
$$\{(x_1, \dots, x_{100}) : x_i \in \{1, \dots, 6\} \text{ für } i = 1, \dots, 100\}.$$

- ③ Das kartesische Produkt von Intervallen ist ein Rechteck in der Ebene bzw. ein Quader im Raum: $[0, 1]^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$

ist der Einheitswürfel im \mathbb{R}^3 mit den Eckpunkten

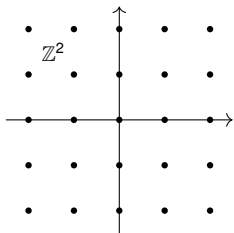
$$\{0, 1\}^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks $[0, 3] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ ist das Produkt der Intervalllängen $3 \cdot 2 = 6$.

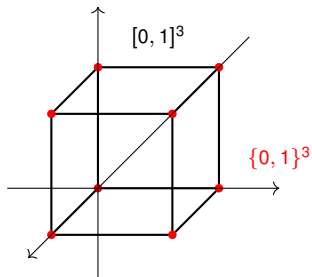
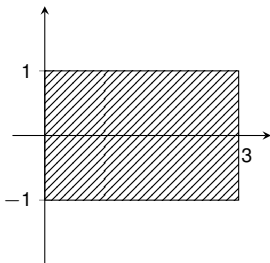
- ④ Beispiele für Teilmengen des kartesischen Produkts \mathbb{R}^2 sind der Einheitskreis

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

oder die Normalparabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.



$$[0, 3] \times [-1, 1]$$



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$$

