

Vorkurs Mathematik

1. Aussagenlogik

ABTEILUNG FÜR DIDAKTIK



Definition 1.1

Eine (mathematische) **Aussage** ist ein Satz, der eindeutig wahr oder falsch ist.
„Wahr“ (w) oder „falsch“ (f) heißt der **Wahrheitswert** der Aussage.

Beispiel 1.2

- 1 „ $2 < 1$.“ ist eine (falsche) Aussage.
- 2 „97 ist eine Primzahl.“ ist eine (wahre) Aussage.
- 3 „Heute ist das Wetter schön.“ ist keine Aussage.
- 4 „ $2x + 7 = 9$.“ ist keine Aussage, sondern eine **Aussageform**.
- 5 „Dieser Satz ist falsch.“ ist keine Aussage (*Paradoxon*).
- 6 „In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.“ ist eine (wahre) Aussage, der *Satz des Pythagoras*.
Ist auch die Umkehrung „Ist in einem Dreieck die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat, so ist dieses Dreieck rechtwinklig.“ wahr?
- 7 „Jede gerade Zahl größer als 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.“ ist eine Aussage, die *Goldbachsche Vermutung*. Ihr Wahrheitswert ist bis heute unbekannt!
- 8 „Mathematik macht Spaß.“ ist natürlich eine wahre Aussage. ;)

Definition 1.3

Die **Negation** einer Aussage A ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist. Sie wird mit $\neg A$ oder \bar{A} bezeichnet (lies: „nicht A “). In einer **Wahrheitstafel**:

A	\bar{A}
w	f
f	w

Beispiel 1.4

- 1 Die Negation der (wahren) Aussage „8 ist gerade.“ ist die (falsche) Aussage „8 ist ungerade.“
- 2 Die Negation des Satzes von Pythagoras ist die (falsche) Aussage „Nicht in jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.“ oder gleichwertig „Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Summe der Kathetenquadrate ungleich dem Hypotenusenquadrat ist.“
- 3 Die Negation der Goldbachschen Vermutung ist „Es gibt eine gerade Zahl größer als 2, die sich *nicht* als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt.“
- 4 Wir bilden die Negation von \bar{A} . In der Wahrheitstafel haben A und $\bar{\bar{A}}$ dieselben Wahrheitswerte. Daher heißen A und $\bar{\bar{A}}$ **tautologisch äquivalent**, man schreibt $A \leftrightarrow \bar{\bar{A}}$.
Zum Beispiel sind A : „8 ist gerade.“ und $\bar{\bar{A}}$: „8 ist nicht ungerade.“ tautologisch äquivalent.

Definition 1.5

Eine **Aussageform** enthält eine (oder mehrere) Variable x , sodass für jede Belegung von x eine Aussage $A(x)$ entsteht.

Beispiel 1.6

- 1 $A(t)$: „ t ist ein Wochentag.“ ist eine Aussageform: $A(\text{Montag})$: „Montag ist ein Wochentag.“ ist eine wahre Aussage, $A(\text{Tomate})$: „Tomate ist ein Wochentag.“ ist eine falsche Aussage.
- 2 **Gleichungen** und **Ungleichungen** sind Aussageformen, zum Beispiel $A(x)$: „ $2x + 7 = 9$.“:

$$A(1) \text{ ist wahr, da } 2 \cdot 1 + 7 = 9.$$

$$A(-1) \text{ ist falsch, da } 2 \cdot (-1) + 7 \neq 9.$$

Die Menge aller Belegungen, für die $A(x)$ eine wahre Aussage ist, heißt die **Lösungsmenge** \mathcal{L} .

$$\mathcal{L} = \{x : A(x) \text{ ist wahr}\} = \{x : \text{„}2x + 7 = 9\text{.“ ist wahr}\} = \{1\}.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung $B(x)$: „ $-2x + 8 < -2$.“ ist $\mathcal{L} = \{x : x > 5\} = (5, \infty)$.

- 3 Der Term $A(a, b) = (a + b)^2$ ist *keine* Aussageform: $A(1, 2) = (1 + 2)^2 = 9$ ist eine Zahl, keine Aussage. Die Gleichung $B(a, b)$: „ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.“ ist eine Aussageform (*Erste binomische Formel*) und für *jede* Belegung von a und b wahr (*allgemeingültig*).

Definition 1.7

Eine Aussageform sei allgemeingültig, also $A(x)$ für *jede* Belegung von x wahr. Dann schreibt man mit dem **Allquantor** \forall (lies: „für alle“)

$$\forall x : A(x).$$

Eine Aussageform sei erfüllbar, also $A(x)$ für (mindestens) eine Belegung von x wahr. Dann schreibt man mit dem **Existenzquantor** \exists (lies: „es existiert“)

$$\exists x : A(x).$$

Gelegentlich schreibt man auch

$\nexists x : A(x)$ für „Es existiert kein x , sodass $A(x)$ wahr ist.“

$\exists! x : A(x)$ für „Es existiert genau ein x , sodass $A(x)$ wahr ist.“

Beispiel 1.8

- ① Die erste binomische Formel ist eine allgemeingültige Aussageform und daher

$$\forall a \forall b : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

eine wahre Aussage. a und b sind *gebundene Variable*, genauso richtig ist auch

$$\forall x \forall y : (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

a und b sind Platzhalter für beliebige *reelle Zahlen*, daher schreibt man

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ oder kürzer}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

- ② Die Gleichung $2x^2 + 7 = 9$ hat die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{-1, 1\}$, sie ist *lösbar*. Daher ist folgende Aussage wahr:

$$\exists x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 7 = 9.$$

Folgende Aussagen sind falsch:

$$\forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 7 = 9.$$

$$\exists! x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 7 = 9.$$

Beispiel 1.8

- Die Gleichung $x^2 = 2$ hat bekanntlich keine rationale Lösung, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. Die Aussageform $x^2 = 2$ ist *unerfüllbar* über \mathbb{Q} , die folgende Aussage ist falsch:

$$\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2. \text{ („2 ist das Quadrat einer rationalen Zahl“)}$$

Ihre Negation ist wahr:

$$\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2, \text{ („2 ist nicht das Quadrat einer rationalen Zahl.“)}$$

äquivalent $\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 \neq 2$. („Das Quadrat jeder rationalen Zahl ist ungleich 2.“)

Genauso ist die Negation der (wahren) Aussage $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ die (falsche) Aussage $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$. **Merkregel:**

$$\neg (\forall x : A(x)) \leftrightarrow \exists x : \neg A(x), \quad \neg (\exists x : A(x)) \leftrightarrow \forall x : \neg A(x).$$

Beispiel 1.9

- ① Folgende (wahre) Aussagen sind gleichbedeutend:

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\forall b \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ oder kürzer}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Auch bei mehreren Existenzquantoren ist die Reihenfolge unerheblich:

$$\exists k \in \mathbb{Z} \exists l \in \mathbb{Z} : 2k + 3l = 1,$$

$$\exists l \in \mathbb{Z} \exists k \in \mathbb{Z} : 2k + 3l = 1 \text{ oder kürzer}$$

$$\exists k, l \in \mathbb{Z} : 2k + 3l = 1.$$

Die Negation dieser Aussage ist falsch und lautet $\forall k, l \in \mathbb{Z} : 2k + 3l \neq 1$.

- ② „Zu jeder Geraden gibt es eine parallele Gerade“ schreibt sich mithilfe von Quantoren als

$$\forall \text{ Gerade } g \exists \text{ Gerade } h : g \parallel h.$$

Diese Aussage ist wahr, die folgende Aussage ist hingegen falsch:

$$\exists \text{ Gerade } h \forall \text{ Gerade } g : g \parallel h.$$

In der oberen Aussage darf h von g abhängen, in der unteren muss h unabhängig von g sein.

Die (wahre) Negation der unteren Aussage lautet

$$\forall \text{ Gerade } h \exists \text{ Gerade } g : g \not\parallel h.$$

- Ein anderes Beispiel für dieses Phänomen:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0,$$

$$\exists y \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{Z} : x + y = 0.$$

Auch hier ist die obere Aussage wahr, da $y = -x$ abhängig von x gewählt werden kann. Die untere Aussage ist falsch, da ihre Negation wahr ist:

$$\forall y \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0.$$

Gleichartige Quantoren dürfen vertauscht werden, aber **bei ungleichartigen Quantoren ist die Reihenfolge wichtig!**

Definition 1.10

Seien A, B Aussagen. Die Aussagen $A \wedge B$ (lies: „**A und B**“) sowie $A \vee B$ (lies: „**A oder B**“) werden durch folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Beispiel 1.11

- Die Aussage „ $5 < 1$ und $3 \leq 3$ “ ist falsch (dritte Zeile).
Die Aussage „Manchmal regnet es oder alle Schüler mögen Mathematik.“ ist wahr (zweite Zeile).
- Das mathematische „und“ entspricht der Alltagssprache, das mathematische „oder“ ist nicht-ausschließend („und/ oder“). Zum Beispiel ist die Aussage

„ F ist ein Parallelogramm oder eine Raute.“

wahr, wenn F ein Quadrat ist. Für das ausschließende „oder“ verwendet man „entweder oder“:

„Zwei Ebenen sind entweder parallel oder sie schneiden sich.“

- 3 Das Symbol „ \leq “ bedeutet „ $<$ oder $=$ “; die Aussage $a \leq b$ ist also wahr, wenn $a = b$ ist. Zum Beispiel sind alle folgenden Aussagen wahr:

$$-1 \leq 0, \quad -1 < 0, \quad -1 \leq -1, \quad -1 \geq -1, \quad -1 = -1,$$

ihre Negationen sind alle falsch:

$$-1 > 0, \quad -1 \geq 0, \quad -1 > -1, \quad -1 < -1, \quad -1 \neq -1.$$

- 4 Folgende (wahre) Aussagen sind gleichbedeutend:

$$(\forall k \in \mathbb{Z} : 2k \text{ ist gerade}) \text{ und } (\forall k \in \mathbb{Z} : 2k + 1 \text{ ist ungerade})$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : 2k \text{ ist gerade und } 2k + 1 \text{ ist ungerade.}$$

Der Allquantor ist also mit der logischen Verknüpfung „und“ *verträglich*, genauso ist der Existenzquantor mit „oder“ *verträglich*. Der Allquantor ist mit „oder“ *unverträglich*, der Existenzquantor ist mit „und“ *unverträglich*.

- 5 Die Aussage $A \vee \bar{A}$ ist immer wahr, eine sogenannte **Tautologie**; dies heißt das *Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten* („tertium non datur“). Ihre Negation $A \wedge \bar{A}$ ist immer falsch (**Kontradiktion**); dies heißt das *Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch*.

Definition 1.12

Seien A, B Aussagen. Die **Implikation** $A \Rightarrow B$ (lies: „ A impliziert B “) wird durch folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Für $A \Rightarrow B$ sind viele verschiedene Verbalisierungen üblich:

- Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.
- Aus A folgt B .
- Aus der Gültigkeit von A lässt sich B schlussfolgern.
- A ist hinreichend für B .
- Unter der Voraussetzung A ist B richtig.
- Wenn A gilt, dann muss schon B gelten.
- Damit A wahr sein kann, muss auch B wahr sein.
- Nur wenn B gilt, kann auch A gelten.
- B ist notwendig für A .

- ① Die Implikation $A \Rightarrow B$: „Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.“ ist wahr,

wenn es regnet und die Straße nass ist (erste Zeile),

wenn es nicht regnet und die Straße nass ist (dritte Zeile),

wenn es nicht regnet und die Straße nicht nass ist (vierte Zeile).

Sie ist falsch, wenn es regnet, ohne dass die Straße nass ist (zweite Zeile).

Die Implikation bewertet nur die Gültigkeit der *Schlussfolgerung*, nicht der Teilaussagen!

- ② Die Implikation „Wenn $0 = 1$, dann ist $\sqrt{2}$ rational.“ ist wahr, denn „ $0 = 1$ “ ist falsch: Multipliziert man $0 = 1$ mit $\sqrt{2}$, so ist $0 = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Eine falsche Aussage impliziert jede beliebige Aussage.
- ③ Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in einem inneren Punkt x_0 von D . Aus der Analysis ist die (wahre) Implikation

Wenn f bei x_0 ein lokales Extremum besitzt, dann ist $f'(x_0) = 0$.

bekannt. In einer Implikation $A \Rightarrow B$ ist A **hinreichende** Bedingung für B und B **notwendige** Bedingung für A . Daher ist obige Implikation

- hinreichendes Kriterium für „ $f'(x_0) = 0$ “: Aus einem lokalen Extremum bei x_0 folgt $f'(x_0) = 0$.
- notwendiges Kriterium für „ f hat bei x_0 ein lokales Extremum“: Aus $f'(x_0) \neq 0$ folgt, dass f bei x_0 kein lokales Extremum hat.

Beachte: Hat f bei x_0 *kein* lokales Extremum, so kann $f'(x_0) = 0$ oder $f'(x_0) \neq 0$ gelten; gilt $f'(x_0) = 0$, so kann f bei x_0 ein lokales Extremum haben oder auch nicht.

Beispiel 1.13

- ④ Implikationen $A \Rightarrow B$ werden häufig als **Satz** formuliert: Aus der **Voraussetzung** A folgt die **Behauptung** B . Jeder Satz erfordert einen **Beweis**, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist. Eine bewiesenen Satz $A \Rightarrow B$ kann man anwenden: Ist die Voraussetzung A erfüllt, so folgt B . Zum Beispiel hat $f(x) = x^2$ ein lokales Minimum bei $x_0 = 0$, daraus folgt $f'(0) = 0$.
- ⑤ Seien $t, a, b \in \mathbb{Z}$. Wir beweisen folgende Implikation:

$$t|a \text{ oder } t|b \Rightarrow t|ab. \quad (1)$$

Ist „ $t|a$ oder $t|b$ “ falsch, so ist (1) wahr. Ist hingegen „ $t|a$ oder $t|b$ “ wahr, so bedeutet das

$$\exists k \in \mathbb{Z} : tk = a \text{ oder } tk = b.$$

Daraus folgt $ab = tkb$ oder $ab = atk$, d.h. „ $t|ab$ “ und damit auch (1) ist wahr. □

Man nennt dies einen **direkten Beweis** der Implikation $A \Rightarrow B$:

Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.

Die *Umkehrung* $t|ab \Rightarrow t|a$ oder $t|b$ von (1) ist nur für Primzahlen $t \in \mathbb{P}$ wahr.

- ⑥ *Voraussetzung*: Seien $x, y \in \mathbb{Z}$.

Behauptung: Sind x und y ungerade, so ist $x + y$ gerade.

BEWEIS Sind x, y ungerade, so existieren ganze Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $x = 2k + 1$ und $y = 2l + 1$. Daraus folgt

$$x + y = 2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1),$$

d.h. $x + y$ ist von der Form $2m$ mit $m = k + l + 1 \in \mathbb{Z}$, also gerade. □

Definition 1.14

Seien A, B Aussagen. Die **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$ (lies: „ A äquivalent B “) wird durch folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Das Symbol \Leftrightarrow ist eine Kombination der Symbole \Rightarrow und \Leftarrow , denn $A \Leftrightarrow B$ ist tautologisch äquivalent zu $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$. Auch für die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ sind verschiedene Sprechweisen üblich:

- A ist äquivalent zu B .
- A gilt genau dann, wenn B gilt.
- A ist wahr dann und nur dann, wenn B wahr ist.
- A ist hinreichend und notwendig für B .

Beispiel 1.15

- 1 „Der Mars ist ein Planet genau dann, wenn der Atlantik Salzwasser enthält.“ ist wahr.
„Die Sonne ist ein Planet genau dann, wenn der Pazifik Süßwasser enthält.“ ist wahr.
„Der Atlantik enthält Salzwasser genau dann, wenn der Pazifik Süßwasser enthält.“ ist falsch.
Die Äquivalenz beurteilt nicht die Gültigkeit der Teilaussagen oder einen kausalen Zusammenhang, sondern nur die Korrektheit der *Schlussfolgerung*!
- 2 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt der **Satz vom Nullprodukt**:

$$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0.$$

- 3 Gleichungen haben eine Lösungsmenge \mathcal{L} ; zwei äquivalente Gleichungen haben dieselbe Lösungsmenge:

$$15 - x = 3x - 1 \Leftrightarrow 16 = 4x$$

Mit **Äquivalenzumformungen** sucht man systematisch äquivalente Gleichungen:

$$15 - x = 3x - 1 \Leftrightarrow 16 = 4x \Leftrightarrow 4 = x.$$

Die letzte Gleichung hat offenbar die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{4\}$, also auch die ursprüngliche Gleichung $15 - x = 3x - 1$.

- 4 Das Quadrieren ist im Allgemeinen *keine* Äquivalenzumformung: Es gilt

$$\sqrt{x} = 2 - x \Rightarrow x = 4 - 4x + x^2,$$

aber nicht „ \Leftarrow “: Für die rechte Gleichung ist $\mathcal{L} = \{1, 4\}$, aber $x = 4$ ist keine Lösung der linken Gleichung (*Scheinlösung*).

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Wir haben gesehen, wie man Wahrheitstafeln nicht nur „vorwärts“ als logische Verknüpfungen, sondern auch „rückwärts“ als **Beweisstrategien** lesen kann. Dabei interessieren uns vor allem wahre Aussagen: Will man beweisen, dass eine Aussage der Form

- $A \Rightarrow B$ wahr ist, setzt man A als wahr voraus und zeigt dann, dass B wahr ist. (direkter Beweis)
- $A \wedge B$ wahr ist, zeigt man, dass A wahr ist und dass B wahr ist.
- $A \vee B$ wahr ist, zeigt man, dass A wahr ist oder dass B wahr ist.

Wir werden nun weitere Beweisstrategien kennenlernen.

Definition 1.16

Seien A, B Aussagen. A und B heißen **tautologisch äquivalent**, wenn sie in der Wahrheitstafel die gleichen Einträge haben; in diesem Fall schreibt man $A \leftrightarrow B$.

A heißt **Tautologie**, falls jeder Eintrag von A in der Wahrheitstafel „wahr“ ist ($A \leftrightarrow \top$)

A heißt **Kontradiktion**, falls jeder Eintrag von A in der Wahrheitstafel „falsch“ ist ($A \leftrightarrow \perp$).

Satz 1.17

Seien A, B, C Aussagen. Es gelten die folgenden tautologischen Äquivalenzen:

- 1 $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$. (**Kommutativgesetz** für \wedge)
- 2 $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$. (**Kommutativgesetz** für \vee)
- 3 $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$. (**Assoziativgesetz** für \wedge)
- 4 $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$. (**Assoziativgesetz** für \vee)
- 5 $(A \wedge B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$. (Erstes **Distributivgesetz**)
- 6 $(A \vee B) \wedge C \leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. (Zweites **Distributivgesetz**)
- 7 $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$. (Erste **Regel von De Morgan**)
- 8 $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$. (Zweite **Regel von De Morgan**)

BEWEIS Alle Aussagen lassen sich beweisen, indem man für alle möglichen Wahrheitswerte von A, B, C anhand einer Wahrheitstafel feststellt, dass die Wahrheitswerte links und rechts übereinstimmen. Wir tun dies hier exemplarisch für (1) und (3):

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f	f	f
w	f	w	f	f	f	f	f
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	f	f	w	f	f
f	w	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

(8) folgt auch aus (7): Es gilt $\overline{\overline{A \wedge B}} \leftrightarrow \overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}}$ und daher

$$\overline{\overline{A \wedge B}} \leftrightarrow \overline{\overline{\overline{\overline{A \wedge B}}}} \leftrightarrow \overline{\overline{\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{\overline{B}}}}} \leftrightarrow \overline{\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}}} \leftrightarrow \overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}}. \square$$

- ① (1) bis (6) verwenden wir selbstverständlich im Alltag: „Es regnet und die Straße ist nass.“ (Kommutativgesetz für \wedge), „Die Ampel leuchtet rot, grün oder gelb.“ (Assoziativgesetz für \vee). Auch für Distributivgesetze und De Morgansche Regeln kann man solche Beispiele machen.
- ② Wegen des Assoziativgesetzes für \wedge können wir $A \wedge B \wedge C$ schreiben. Eine Und-Verknüpfung $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ ist genau dann wahr, wenn alle Teilaussagen A_1, A_2, \dots, A_n wahr sind. Genauso können wir $A \vee B \vee C$ schreiben; eine Oder-Verknüpfung $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ist genau dann wahr, wenn (mindestens) eine der Teilaussagen A_1, \dots, A_n wahr ist.
- ④ Mithilfe der Regeln in Satz 1.17 können wir komplexe logische Verknüpfungen systematisch vereinfachen:

$$\begin{aligned}\overline{A \vee B} \vee (A \wedge (B \vee C)) &\leftrightarrow \overline{A \wedge B} \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ &\leftrightarrow \top \vee (A \wedge C) \leftrightarrow \top,\end{aligned}$$

die Aussage ist eine Tautologie. Beachte:

$$A \wedge \top \leftrightarrow A,$$

$$A \wedge \perp \leftrightarrow \perp,$$

$$A \vee \top \leftrightarrow \top,$$

$$A \vee \perp \leftrightarrow A.$$

Satz 1.19

Es seien A, B, C Aussagen. Es gelten die folgenden tautologischen Äquivalenzen:

- 1 $\bar{A} \Rightarrow \perp \leftrightarrow A$. („Reductio ad absurdum“)
- 2 $A \Rightarrow B \leftrightarrow \bar{A} \vee B$.
- 3 $A \Rightarrow B \leftrightarrow A \wedge \bar{B} \Rightarrow \perp$. (**Beweis durch Widerspruch**)
- 4 $A \Rightarrow B \leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. (**Kontraposition**)
- 5 $A \Rightarrow B \leftrightarrow (A \wedge C \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \bar{C} \Rightarrow B)$. (**Fallunterscheidung**)
- 6 $A \Leftrightarrow B \leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
- 7 $A \Leftrightarrow B \leftrightarrow \bar{A} \Leftrightarrow \bar{B}$.
- 8 $A \Leftrightarrow B \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$.
- 9 $\overline{A \Leftrightarrow B} \leftrightarrow \bar{A} \Leftrightarrow B$.

Satz 1.19

BEWEIS Wir beweisen (1) und (2) mithilfe einer Wahrheitstafel:

A	B	\perp	\bar{A}	$\bar{A} \Rightarrow \perp$	$A \Rightarrow B$	$\bar{A} \vee B$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	f	w	f	w	w
f	f	f	w	f	w	w

Mit der Regel von De Morgan folgt daraus (3):

$$A \wedge \bar{B} \Rightarrow \perp \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \overline{A \wedge \bar{B}} \leftrightarrow \bar{A} \vee B \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} A \Rightarrow B.$$

In ähnlicher Weise folgt (4) aus (2) mithilfe des Kommutativgesetzes für \vee :

$$\bar{B} \Rightarrow \bar{A} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \bar{B} \vee \bar{A} \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} A \Rightarrow B.$$

Die Aussagen (5), (6) und (8) sollen zur Übung selbst bewiesen werden. Damit führen wir auch die Aussagen (7) und (9) auf bereits bewiesene Aussagen zurück:

$$\begin{aligned} A \Leftrightarrow B &\Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) \wedge (\bar{A} \Rightarrow \bar{B}) \leftrightarrow \bar{A} \Leftrightarrow \bar{B}, \\ \overline{A \Leftrightarrow B} &\Leftrightarrow \overline{A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow A} \leftrightarrow (A \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{A}) \leftrightarrow \bar{A} \Leftrightarrow B. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 1.20(1)

Sei $x \in \mathbb{Z}$. Zur Übung beweise man direkt: $(A \Rightarrow B)$

$$x \text{ ungerade} \Rightarrow x^2 \text{ ungerade.}$$

Wir beweisen nun die Umkehrung, also $(B \Rightarrow A)$

$$x^2 \text{ ungerade} \Rightarrow x \text{ ungerade.} \quad (2)$$

In einem direkten Beweis kann man mit $x^2 = 2k + 1$ wenig anfangen. Aber (2) ist tautologisch äquivalent zur **Kontraposition** $(\bar{A} \Rightarrow \bar{B})$

$$x \text{ gerade} \Rightarrow x^2 \text{ gerade.}$$

Aus $x = 2k$ folgt sofort, dass auch $x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$ gerade ist. □

Damit ist auch folgende Äquivalenz bewiesen: $(A \Leftrightarrow B)$

$$x \text{ ungerade} \Leftrightarrow x^2 \text{ ungerade.}$$

Genauso kann man eine Äquivalenz „ \Leftrightarrow “ in zwei Richtungen „ \Rightarrow “ und „ \Leftarrow “ zerlegen.

Nach Satz 1.19(7) ist auch folgende Äquivalenz wahr: $(\bar{A} \Leftrightarrow \bar{B})$

$$x \text{ gerade} \Leftrightarrow x^2 \text{ gerade.}$$

- 2 Bei einem **indirekten Beweis** wie in Satz 1.19(1) wollen wir eine Aussage A beweisen; dazu treffen wir die *Annahme*, dass A falsch ist, und folgern daraus eine falsche Aussage ($\bar{A} \Rightarrow \perp$). Als Beispiel beweisen wir, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. (siehe Skriptum)
- 3 Wir machen ein zweites Beispiel für einen Widerspruchsbeweis in der Form $A \Rightarrow B$.
Behauptung: Quadratische Funktionen haben keine Wendestelle.
BEWEIS (siehe Skriptum)
- 4 Wir haben bereits $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ bewiesen. Nun wollen wir beweisen:

$$\exists a, b \notin \mathbb{Q} : a^b \in \mathbb{Q}.$$

Dazu machen wir eine **Fallunterscheidung**:

Fall 1: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational. Dann wählen wir $a = b = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

und die Aussage $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ ist wahr.

Fall 2: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist irrational. Dann wählen wir $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}, b = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

und erhalten die Aussage $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$. \square

In Fallunterscheidungen können auch drei oder mehr Fälle unterschieden werden, solange alle Fälle abgedeckt werden; auch müssen sich die einzelnen Fälle nicht gegenseitig ausschließen.

Beispiel 1.20(5)

Wir möchten folgende Aussage mit **Allquantor** beweisen:

$$\forall x, y \geq 0 : x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2.$$

Seien $x, y \geq 0$ *beliebig* und $x \leq y$. Multiplikation der Ungleichung $x \leq y$ mit $x \geq 0$ ergibt $x^2 \leq xy$, Multiplikation mit $y \geq 0$ entsprechend $xy \leq y^2$. Zusammen folgt $x^2 \leq xy \leq y^2$, also $x^2 \leq y^2$. Damit ist die Implikation *für alle* $x, y \geq 0$ bewiesen. □

Die folgende Aussage ist falsch:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2.$$

Um sie zu widerlegen, müssen wir ein **Gegenbeispiel** angeben, also ihre Negation beweisen:

$$\exists x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \text{ und } x^2 > y^2.$$

Zum Beispiel ist $-2 \leq 1$, aber $(-2)^2 = 4 > 1 = 1^2$. □

Achtung: Die Formulierung „Es gilt nicht $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$ “ ist missverständlich:

$$\neg(\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2),$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \neg(x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2).$$

Zur ersten Aussage sagt man „Es gilt *im Allgemeinen* nicht $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.“

Zur Übung beweise man den **Ringschluss**

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \wedge (C \Leftrightarrow A).$$

Dies funktioniert auch mit mehr als drei Aussagen und komplexeren Ketten von Implikationen, solange man von jeder Aussage jede andere Aussage erreicht.

Als Beispiel beweisen wir für eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$

$$n \text{ ist ungerade} \Leftrightarrow 3n - 1 \text{ ist gerade} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

BEWEIS (siehe Skriptum)



Um eine Aussage der Form $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ zu beweisen, kann man wie folgt vorgehen:

- 1 **Induktionsanfang:** Beweise die Aussage $A(1)$.
- 2 **Induktionsschluss:** Beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.
(**Induktionsvoraussetzung** \Rightarrow **Induktionsbehauptung**)

Es gilt dann $A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \dots$, sodass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen ist. Es gibt viele Varianten der vollständigen Induktion. Als Beispiel beweisen wir die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} : 7 \mid 2^{n+1} + 3^{2n-1}.$$

(siehe Skriptum)



Im Beweis eines Satzes oder einer Behauptung dürfen *ausschließlich* folgende Aussagen zur Argumentation herangezogen werden:

- Als wahr angenommene Aussagen (Axiome),
- bereits bewiesene Sätze,
- die Voraussetzungen der zu beweisenden Aussage.

Diese strenge Unterscheidung und das logische Vorgehen machen das deduktive Prinzip aus, das die Grundlage der gesamten Mathematik ist.

Man verwendet fast ausschließlich \Leftrightarrow anstelle der tautologischen Äquivalenz \leftrightarrow , weil man nur an wahren Aussagen interessiert ist; dies wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 1.21

Seien A, B Aussagen. Dann gilt:

$A \Leftrightarrow B$ genau dann, wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

BEWEIS Es gelte $A \leftrightarrow B$. Ist A wahr, so ist auch B wahr, d.h. $A \leftrightarrow B$ ist wahr. Ist A falsch, so ist auch B falsch, d.h. $A \leftrightarrow B$ ist wiederum wahr. Also ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie:

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
f	f	w

Sei umgekehrt $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie. Ist dann A wahr, so muss (nach Definition von \leftrightarrow) auch B wahr sein; genauso muss B falsch sein, wenn A falsch ist. Die Wahrheitstafel ist also dieselbe wie zuvor und A, B sind tautologisch äquivalent. □