Übungsblatt 4.2 – Lösungshinweise

Verständnisaufgaben

- a) Sei $f : \{1,2\} \to \{1\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1$. Dann ist $f(\{1\} \cap \{2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$, aber $f(\{1\}) \cap f(\{2\}) = \{1\}$. Weiter ist $f(\{1,2\} \setminus \{1\}) = \{1\}$, aber $f(\{1,2\}) \setminus f(\{1\}) = \emptyset$. Die fehlenden Inklusionen „$\supseteq$" bzw. „$\subseteq$" gelten genau dann, wenn f injektiv ist, siehe Satz 4.21(2).

  b) Für $f : \mathbb{R} \to (0,\infty), f(x) = e^x$ und $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \log x$ gilt $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, aber $f \circ g = \mathrm{id}_{(0,\infty)} \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = g \circ f$.

  c) $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, d.h. $g \circ f$ ist gerade. Die Umkehrung gilt nicht: $f(x) = x$ ist nicht gerade, aber für $g(x) = x^2$ ist $(g \circ f)(x) = x^2$ gerade. Für ungerade Funktionen ist keine der Implikationen wahr: $f(x) = x$ ist ungerade, aber für $g(x) = 1$ ist $(g \circ f)(x) = 1$ nicht ungerade. $f(x) = x + \pi$ ist nicht ungerade, aber für $g(x) = \sin(x)$ ist $(g \circ f)(x) = -\sin(x)$ ungerade.

  d) Für $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2$ gilt $f \leqslant g$, wegen $f(0) = g(0) = 0$ aber nicht $f < g$.

- Die erste Gleichung $2(3-x)^2 = y + 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 - \frac{y}{2} = 0$ ist unlösbar für $y < -8$, für $y \geqslant -8$ ist $\mathcal{L} = \{3 - \sqrt{\frac{y+8}{2}}, 3 + \sqrt{\frac{y+8}{2}}\}$. Damit ist $f_1 : [3,\infty) \to \mathbb{R}$ eine injektive und $f_2 : \mathbb{R} \to [-8,\infty)$ eine surjektive Einschränkung von f.
  Die zweite Gleichung $\frac{2x}{x^2+1} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ hat für $y = 0$ die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{0\}$, für $|y| > 1$ keine Lösung und für $|y| \leqslant 1$ ist $\mathcal{L} = \{\frac{1}{y} - \frac{\sqrt{1-y^2}}{|y|}, \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{|y|}\}$. Damit ist zum Beispiel $g_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine injektive und $g_2 : \mathbb{R} \to [-1,1]$ eine surjektive Einschränkung von g.

- a) $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist injektiv und beschränkt, $f_2 : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist injektiv und unbeschränkt.

  b) $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_1(x) := -\sqrt{-(x+1)}$ für $x < -1$ ist monoton und surjektiv, $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_2(x) := -(x+1)(x+3)$ für $x < -1$ ist nicht monoton und surjektiv. ($g_1(x) = g_2(x) = g(x)$ für $x \geqslant -1$)

  c) Es ist zwar $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x+1}) = x^2 + 1 = h(x)$, aber h hat nicht den Definitionsbereich $[-1,\infty)$, daher ist $f \circ g \neq h$. Wegen $f(\mathbb{R}) = [-1,\infty)$ ist k wohldefiniert, aber es gilt $(g \circ f)(x) = g(x^4 - 2x^2) = |x^2 - 1| \neq k(x)$, daher ist $g \circ f \neq k$.

- a) Für $a < 0$ ist $D = [0,\infty)$ und $f_a(D) = (0, -\frac{1}{a}]$. Für $a = 0$ ist $D = (0,\infty)$ und $f_0(D) = (0,\infty)$. Für $a > 0$ ist $D = [0,\infty) \setminus \{a^2\}$ und $f_A(D) = (-\infty, -\frac{1}{a}] \cup (0,\infty)$.

  b) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist f_a bijektiv mit der Umkehrfunktion $f_a^{-1} : f_a(D) \to D, f_a^{-1}(x) = (a + \frac{1}{y})^2$. Beachte stets $0 \notin f_a(D)$.

- a) Für jedes $a \in A$ gilt $f(f(x)) = f(x)$. Ist f injektiv, so folgt daraus $f(x) = x$, d.h. $f = \mathrm{id}_A$. $\square$

  b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ ist idempotent, ebenso konstante Funktionen $f(x) = C$.

- Aus $x = y = 0$ folgt $f(f(0)) = -2f(0)$, aus $x = f(0), y = 0$ andererseits $f(f(0)) = -f(0)$; das kann nur für $0 = f(0) = f(f(0))$ erfüllt sein. Mit $y = 0$ ergibt sich nun $x + 2f(x) + f(-x) = 0$, mit $-x$ statt x auch $-x + 2f(-x) + f(x) = 0$. Zusammen folgt daraus $f(-x) = -f(x)$ und dann $f(x) = -x$. Dies erfüllt tatsächlich die gegebene Funktionalgleichung; damit ist $f(x) = -x$ die einzige Lösung.

Aufgabe 42

a) Beide sind ungerade und streng monoton wachsend, f ist beschränkt, g ist unbeschränkt.

b)
- $(\tilde{f} + g)(-x) = \tilde{f}(-x) + g(-x) = -\tilde{f}(x) - g(x) = -(\tilde{f} + g)(x)$ und $(\tilde{f}g)(-x) = \tilde{f}(-x)g(-x) = (-\tilde{f}(x))(-g(x)) = \tilde{f}(x)g(x) = (\tilde{f}g)(x)$.
- Für $0 < x < 1$ gilt $0 < x^2 \Rightarrow 1 - x^2 < 1 + x^2 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} < \sqrt{1+x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} < x\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(x) < g(x)$. Für $-1 < x < 0$ gilt genauso $0 < x^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} > x\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(x) > g(x)$.
- Für $-1 < x < 0$ gilt $f(x), g(x) < 0$, für $0 < x < 1$ gilt $f(x), g(x) > 0$; in beiden Fällen ist also $\frac{\tilde{f}}{g} \leqslant \frac{g}{\tilde{f}} \Leftrightarrow \tilde{f}(x)^2 \leqslant g(x)^2 \Leftrightarrow x^2(1-x^2) \leqslant x^2(1+x^2) \Leftrightarrow 0 \leqslant x^4$. Da dies immer wahr ist, ist auch $\frac{\tilde{f}}{g} \leqslant \frac{g}{\tilde{f}}$ für alle $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$ wahr. $\square$

c) $f(\mathbb{R}) = (-1,1)$, daher ist $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = x$ wohldefiniert; weiter ist $f \circ g : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x$ und $f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

Aufgabe 43

a) $(g \circ f)(X) = \{g(f(x)) : x \in X\} = \{g(y) : y \in f(X)\} = g(f(X))$,
$(g \circ f)^{-1}(Z) = \{x \in A : g(f(x)) \in Z\} = \{x \in A : f(x) \in g^{-1}(Z)\} = f^{-1}(g^{-1}(Z))$. $\square$

b) Beide Aussagen sind im Allgemeinen falsch, nur „$\subseteq$“ gilt immer: Für $f : \{1,2\} \to \{1,2\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2$ und $h = f$ gilt $(f+h)(\{1,2\}) = \{f(1)+h(1), f(2)+h(2)\} = \{2,4\}$, aber $f(\{1,2\})+h(\{1,2\}) = \{2,3,4\}$; und genauso $(fh)(\{1,2\}) = \{f(1)h(1), f(2)h(2)\} = \{1,4\}$, aber $f(\{1,2\}) \cdot h(\{1,2\}) = \{1,2,4\}$.

c) $f_1(\mathbb{R}) = (0,1]$, $f_2((-1,2)) = (-\infty, \log(\frac{9}{4})]$, $f_3(\mathbb{R}) = (0,1]$, $f_4((-\infty,4)) = (-\infty,4)$, $f_5([-3,22]) = [0,\sqrt{5}]$, $f_6((-\infty,1] \cup (0,\infty)) = [0,1) \cup (1,\infty)$.

d) $f_1^{-1}((0,1]) = \mathbb{R}$, $f_2^{-1}([0,\infty)) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, $f_3^{-1}\left(\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]\right) = [-2,-1] \cup [1,2]$, $f_5^{-1}(\{0\}) = \{22\}$.

Aufgabe 44

a) $f(x+y) = a(x+y) = ax+ay = f(x)+f(y)$, also ist f linear. Für $b \neq 0$ ist $f(x+y) = f(x)+f(y)+2b \neq f(x)+f(y)$, also $f(x) = ax+b$ nicht linear.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) = f(1+\ldots+1) = f(1)+\ldots+f(1) = nf(1)$, mit $a := f(1) \in \mathbb{R}$ also $f(n) = an$. Weiter gilt $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ und daher $0 = f(0) = f(n+(-n)) = f(n)+f(-n)$ $\Rightarrow f(-n) = -f(n) = -an = a(-n)$; damit ist $f(z) = az$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Im letzten Schritt betrachten wir $n \cdot f(\frac{z}{n}) = f(\frac{z}{n}) + \ldots + f(\frac{z}{n}) = f(\frac{z}{n} + \ldots + \frac{z}{n}) = f(n \cdot \frac{z}{n}) = f(z) = az \Rightarrow f(\frac{z}{n}) = a \cdot \frac{z}{n}$; damit ist $f(r) = ar$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ gezeigt. $\square$

c) Sind f, g linear, so sind auch $\lambda f, f+g$ linear, denn $(\lambda f)(x+y) = \lambda f(x+y) = \lambda(f(x)+f(y)) = \lambda f(x) + \lambda f(y) = (\lambda f)(x)+(\lambda f)(y)$ und genauso $(f+g)(x+y) = f(x+y)+g(x+y) = f(x)+f(y)+g(x)+g(y) = (f+g)(x)+(f+g)(y)$; daher sind beide Verknüpfungen wohldefiniert. Die Distributivgesetze übertragen sich wie bei jeder punktweisen Verknüpfung von $\mathbb{R}$ auf $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f + \mu f)(x),$$
$$(\lambda(f+g))(x) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f + \lambda g)(x). \square$$

d) $(f \circ g)(x+y) = f(g(x+y)) = f(g(x)+g(y)) = f(g(x))+f(g(y)) = (f \circ g)(x)+(f \circ g)(y) \Rightarrow f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, durch Vertauschen von f, g folgt auch $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\square$

Aufgabe 45

a) f_1 ist injektiv und surjektiv, also bijektiv. f_2 ist injektiv, aber nicht surjektiv ($f_2(x) \neq 0$), also nicht bijektiv. f_3 ist injektiv, aber nicht surjektiv ($f_3(x) \geqslant 0$), also nicht bijektiv. f_4 ist injektiv und surjektiv, also bijektiv. f_5 ist injektiv und surjektiv, also bijektiv. f_6 ist nicht injektiv ($f_6(1) = f_6(-1)$) und nicht surjektiv ($f_6(x) \neq 1$), also nicht bijektiv. f_7 ist surjektiv, aber nicht injektiv ($f_7(0,1) = f_7(1,0)$), also nicht bijektiv. f_8 ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

b) $f_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1^{-1}(x) = 2x+3$, $f_4^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\infty), f_4^{-1}(x) = e^{x-1}$, $f_5^{-1} = f_5$, $f_8^{-1} = f_8$, beachte $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 1-x \in \mathbb{Q}$.

c) $f_1^{-n}(x) = 2^n x + 3 \cdot (2^n - 1)$. $f_5^{-n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ für gerades n und $f_5^{-n} = f_5$ für ungerades n.

Aufgabe 46

a) Nach Satz 4.24(2) ist g auch surjektiv, also bijektiv. Daher ist $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ surjektiv. $\square$

b) $f : \{1\} \to \{1,2\}, 1 \mapsto 1$ ist nicht surjektiv, aber für die Abbildung $g : \{1,2\} \to \{1\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1$ ist $g \circ f : \{1\} \to \{1\}, 1 \mapsto 1$ surjektiv.

c) Nach Satz 4.24(2) ist f auch injektiv, also bijektiv. Daher ist $(g \circ f) \circ f^{-1} = g$ injektiv. $\square$

d) $g : \{1,2\} \to \{1\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1$ ist nicht injektiv, aber für die Abbildung $f : \{1\} \to \{1,2\}, 1 \mapsto 1$ ist $g \circ f : \{1\} \to \{1\}, 1 \mapsto 1$ injektiv.

e) Die Einschränkung $f : A \to f(A)$ ist auch surjektiv, also bijektiv. $f^{-1} : f(A) \to A$ ist surjektiv und kann zu einer surjektiven Funktion $h : B \to A$ fortgesetzt werden: Wähle $x_0 \in A$ und setze

$$h(y) := \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{falls } y \in f(A), \\ x_0 & \text{sonst.} \ \square \end{cases}$$

Aufgabe 47

a) Folgt sofort aus Satz 4.24(1)c). $\square$

b) $(g \circ f \circ g^{-1}) \circ (g \circ f \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_A$, denn $f \circ f = \mathrm{id}_A$. $\square$

c) Für $b \neq 1$ gilt $b - x \neq 1 - x \Rightarrow f(x) \neq 1$, also ist f wohldefiniert. Wir berechnen $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{b-x}{1-x}) = \frac{b(1-x)-(b-x)}{1-x-(b-x)} = \frac{x-bx}{1-b} = x$ für $x \neq 1 \Rightarrow f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$, also ist f involutiv.
Für $x > 0$ gilt $e^x + 1 > e^x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{e^x+1}{e^x-1} > 1 \Rightarrow g(x) > 0$, also ist g wohldefiniert. Wir berechnen $g(g(x)) = \log\left(\frac{\frac{e^x+1}{e^x-1}+1}{\frac{e^x+1}{e^x-1}-1}\right) = \log\left(\frac{2e^x}{2}\right) = x$ für $x > 0$, also ist g involutiv. $\square$

Aufgabe 48

a) $\delta_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda\delta_x(f)$ und $\delta_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \delta_x(f) + \delta_x(g)$. $\square$

b) Aus $\delta_x = \delta_y$ folgt an der Stelle $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $\delta_x(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \delta_x(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(y) \Rightarrow x = y$. $\square$

Aufgabe 49

a) Für jedes Element $x \in A$ gibt es m Möglichkeiten für das Bild $f(x) \in B$. Jede Abbildung $f : A \to B$ ist durch n solche Wahlen bestimmt, es gibt also $m \cdot \ldots \cdot m = m^n$ verschiedene Abbildungen in B^A.

b) Ist $f : A \to B$ bijektiv, so muss jedes $y \in B$ genau ein Urbild $x \in B$ haben, also $n = m$ sein. Für das Bild von $1 \in A$ hat man n Möglichkeiten in B, für das Bild von $2 \in A$ nur noch $n - 1$ Möglichkeiten usw. Es gibt also $n \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ mögliche bijektive Abbildungen $f : A \to B$ (*Permutationen*).

c) Ist $f : A \to B$ injektiv, so darf jedes $y \in B$ höchstens ein Urbild $x \in A$ haben, also muss $n \leqslant m$ sein. Aus den m Elementen von B wählt man n aus und verteilt sie auf die Urbilder $1, \ldots, n \in A$. Für dieses „n aus m" gibt es $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ Möglichkeiten, also so viele injektive Abbildungen $f : A \to B$.

Aufgabe 50

a) Die Abbildungen $f_1 : \mathbb{Z} \to \{kz : z \in \mathbb{Z}\}$, $f_1(z) = kz$, $f_2 : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{N}$, $f_2(n) = n - 1$, $f_3 : (0,1) \to (0,\infty)$, $f_3(x) = \frac{x}{1-x}$, $f_4 : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \log(\frac{1}{x} - 1)$ sind alle bijektiv. $\square$

b) Es gelte $g(n,m) = g(\tilde{n},\tilde{m})$, also $2^{n-1}(2m-1) = 2^{\tilde{n}-1}(2\tilde{m}-1)$. Da $2^{n-1}, 2^{\tilde{n}-1}$ gerade und $2m-1, 2\tilde{m}-1$ ungerade sind, muss dann $2^{n-1} = 2^{\tilde{n}-1}$ und $2m - 1 = 2\tilde{m} - 1$ gelten; daraus folgt $n = \tilde{n}$ und $m = \tilde{m}$, also $(n,m) = (\tilde{n},\tilde{m})$. $\square$

c) Wäre f surjektiv, so hätte $\{n \in \mathbb{N} : n \notin f(n)\} \subseteq \mathbb{N}$ ein Urbild $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $m \in f(m) \Leftrightarrow m \notin f(m)$, ein Widerspruch. $\lightning$ Also kann f nicht surjektiv sein. $\square$
Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R}$.