

Übungsblatt 4.2

Verständnisaufgaben

- a) Zeigen Sie durch zwei Gegenbeispiele, dass die fehlenden Eigenschaften des Bildes in Satz 4.14 im Allgemeinen nicht gelten. Welche Eigenschaft muss f haben, damit sie gelten?
- b) Finden Sie zwei Funktionen f, g , sodass die Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$ verschiedene (wohldefinierte) Funktionen sind, aber dieselbe Funktionsgleichung haben.
- c) Zeigen Sie: Ist f gerade, so auch $g \circ f$. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? Gilt dasselbe für ungerade Funktionen?
- d) Finden Sie zwei Funktionen $f \neq g$, sodass $f \leq g$, nicht aber $f < g$ gilt.
- Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in Abhängigkeit von $y \in \mathbb{R}$:

$$2(3-x)^2 = y + 8$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = y.$$

Geben Sie nun jeweils eine surjektive und eine injektive Einschränkung der Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2(3-x)^2 - 8$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ an.

- a) Geben Sie jeweils eine beschränkte und eine unbeschränkte injektive Einschränkung der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$ an.
- b) Geben Sie jeweils eine monotone und eine nicht monotone surjektive Fortsetzung der Funktion $g : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ an.
- c) Es seien $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 2$ und $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = x^2 - 1$. Beweisen oder widerlegen Sie die Gleichheiten $f \circ g = h$ und $g \circ f = k$.
- a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D und das Bild $f(D)$ der Funktion $f_a : D \rightarrow f(D)$, $f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.
- b) Für welche a ist f_a bijektiv? Bestimmen Sie in diesen Fällen die Umkehrfunktion.
- Eine Abbildung $f : A \rightarrow A$ mit der Eigenschaft $f \circ f = f$ heißt *idempotent*.
 - a) Zeigen Sie, dass jede idempotente Funktion entweder die Identität id_A oder nicht injektiv ist.
 - b) Finden Sie zwei verschiedene idempotente Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die nicht die Identität $\text{id}_{\mathbb{R}}$ sind.
- *Knobelaufgabe:* Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x + 2f(x) + f(f(y) - x) = y.$$

Aufgabe 42

Es seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ und $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ gegeben.

- a) Sind f und g gerade, ungerade, beschränkt, (streng) monoton wachsend oder fallend?
- b) Es sei $\tilde{f}$ die Einschränkung von f auf $(-1, 1)$. Zeigen Sie:
 - Die Funktion $\tilde{f} + g$ ist ungerade, die Funktion $\tilde{f}g$ ist gerade.
 - Es gilt $f < g$ auf $(0, 1)$, aber $g < f$ auf $(-1, 0)$.
 - Auf einem geeigneten Definitionsbereich gilt $\frac{\tilde{f}}{g} \leq \frac{g}{\tilde{f}}$.
- c) Bestimmen Sie das Bild von f , berechnen Sie die Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$ sowie die n -fache Verkettung $f^n = f \circ \dots \circ f$.

Aufgabe 43

Seien $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Abbildungen, $g \circ f : A \rightarrow C$ und $X \subseteq A, Z \subseteq C$.

- a) Beweisen Sie für Bild und Urbild die Gleichungen $(g \circ f)(X) = g(f(X))$ und $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.
b) Sei $h : A \rightarrow B$ eine weitere Abbildung und $B \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen

$$(f + h)(A) = f(A) + h(A) := \{x + y : x \in f(A), y \in h(A)\},$$
$$(fh)(A) = f(A) \cdot h(A) := \{xy : x \in f(A), y \in h(A)\}.$$

- c) Bestimmen Sie mithilfe von a) jeweils das Bild der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) &= e^{-x^2} & f_2 : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) &= \log(2 + x - x^2) \\ f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) &= \frac{1}{1 + x^2} & f_4 : (-\infty, 4) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x) &= \log_2(16 - 2^x) \\ f_5 : [-3, 22] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_5(x) &= \sqrt{5 - \sqrt{x + 3}} & f_6 : (-\infty, -1] \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_6(x) &= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

- d) Bestimmen Sie für die Funktionen aus c) die Urbilder

$$f_1^{-1}((0, 1]), \quad f_2^{-1}([0, \infty)), \quad f_3^{-1}\left(\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]\right), \quad f_5^{-1}(\{0\}).$$

Aufgabe 44

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *linear*, falls

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Die Menge aller linearen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Alle Funktionen der Form $f(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$ sind linear. Ist auch $f(x) = ax + b$ linear?
b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Zeigen Sie nacheinander: Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, sodass

- $f(n) = an$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- $f(0) = 0$ und $f(-1) = -a$,
- $f(z) = az$ für alle $z \in \mathbb{Z}$,
- $f(r) = ar$ für alle $r = \frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$.

Bemerkung: Fordert man zusätzlich die *Stetigkeit* von f in einem Punkt, so gilt $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. alle stetigen linearen Funktionen sind von der Form in a).

- c) Auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind die Verknüpfungen

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), (\lambda, f) \mapsto \lambda f \quad + : \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), (f, g) \mapsto f + g$$

wohldefiniert und es gelten die Distributivgesetze: ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

$$(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f, \quad \lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g.$$

- d) $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist unter Verkettung abgeschlossen, d.h. aus $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ folgt $f \circ g, g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 45

- a) Welche der Funktionen sind surjektiv, injektiv oder bijektiv?

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) &= \frac{1}{2}(x - 3) & f_2 : \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{7}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) &= \frac{7}{x^3 - 7} \\ f_3 : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) &= \sqrt{\log(x)} & f_4 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x) &= 1 + \log(x) \\ f_5 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f_5(x) &= \frac{x + 1}{x - 1} & f_6 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad f_6(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \\ f_7 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_7(x, y) &= x^3 + y^3 & f_8 : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f_8(x) &= \begin{cases} 1 - x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ x, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie jeweils die Umkehrfunktion der bijektiven Funktionen in a).

- c) Berechnen Sie die n -fachen Verkettungen $f_1^{-n} = f_1^{-1} \circ \dots \circ f_1^{-1}$ und f_5^{-n} .

Aufgabe 46

Seien A, B, C Mengen und $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ zwei Abbildungen.

- Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist auch f surjektiv.
- Finden Sie Abbildungen f und g , sodass $g \circ f$ surjektiv ist, nicht aber f .
- Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist auch g injektiv.
- Finden Sie Abbildungen f und g , sodass $g \circ f$ injektiv ist, nicht aber g .
- Es sei $f : A \rightarrow B$ injektiv. Zeigen Sie, dass es eine surjektive Abbildung $h : B \rightarrow A$ gibt.
Bemerkung: Auch die Umkehrung dieser Aussage gilt, der Beweis benötigt aber das Auswahlaxiom.

Aufgabe 47

Eine Abbildung $f : A \rightarrow A$ mit der Eigenschaft $f \circ f = \text{id}_A$ heißt **involutiv**. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- Jede involutive Funktion ist bijektiv mit $f^{-1} = f$.
- Ist f involutiv und $g : A \rightarrow A$ bijektiv, so ist auch $g \circ f \circ g^{-1}$ involutiv.
- Sei $b \neq 1$. Die folgenden Funktionen sind wohldefiniert und involutiv:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{b-x}{1-x}, \quad g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), g(x) = \log \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right).$$

Aufgabe 48

Für jede Stelle $x \in \mathbb{R}$ definieren wir das *Dirac-Funktional*

$$\delta_x : \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(x).$$

- Zeigen Sie: δ_x ist linear, d.h. für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt

$$\delta_x(\lambda f) = \lambda \delta_x(f), \quad \delta_x(f + g) = \delta_x(f) + \delta_x(g).$$

- Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung injektiv ist:

$$\delta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Abb}(\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}), x \mapsto \delta_x.$$

Aufgabe 49

Seien $A = \{1, \dots, n\}$, $B = \{1, \dots, m\}$ endlich und $B^A = \text{Abb}(A, B)$ die Menge aller Abbildungen $f : A \rightarrow B$.

- Zeigen Sie, dass $\#(B^A) = (\#B)^{\#A} = m^n$.
- Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen bijektiven Abbildungen $f : A \rightarrow B$.
- Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen injektiven Abbildungen $f : A \rightarrow B$.

Aufgabe 50

- Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Gleichmächtigkeiten, indem Sie geeignete bijektive Abbildungen finden:

$$\#\{kz : z \in \mathbb{Z}\} = \#\mathbb{Z}, \quad \#(\mathbb{N} \setminus \{1\}) = \#\mathbb{N}, \quad \#(0, 1) = \#(0, \infty), \quad \#(0, 1) = \#\mathbb{R}.$$

- Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^{n-1}(2m-1)$ injektiv ist. ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist *abzählbar*)
- Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt. ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist *überabzählbar*)
Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\{n \in \mathbb{N} : n \notin f(n)\}$.