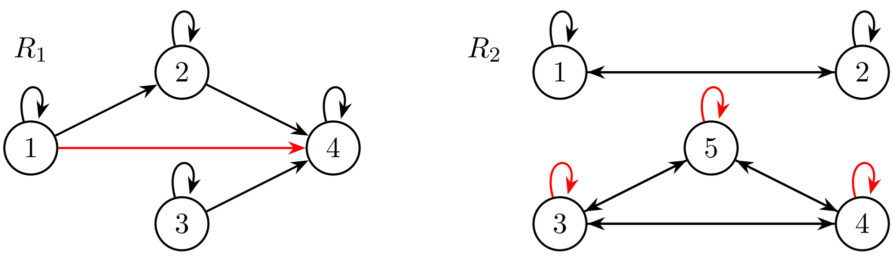
Übungsblatt 4.1 – Lösungshinweise

Verständnisaufgaben

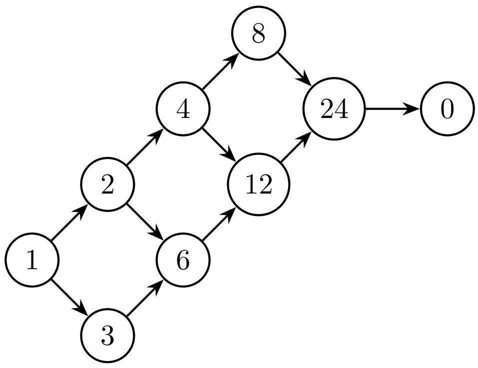
- a) Reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht transitiv, nicht total.
  b) Nicht reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht transitiv, nicht total.
  c) Reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, transitiv, nicht total (Äquivalenzrelation).
  d) Reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, nicht total (Ordnungsrelation).
  e) Reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, transitiv, nicht total.
  f) Reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, transitiv, nicht total (Äquivalenzrelation).
- a) Gleichheit $x = y$ auf $\mathbb{R}$
  b) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ auf $\{1,2\}$
  c) $<$ auf $\mathbb{R}$
  d) $x - y < 1$ auf $\mathbb{R}$
- $8 \equiv -8 \equiv 28 \equiv 0, 51 \equiv 3 \mod 4$. $8 \equiv 1, -8 \equiv 6, 28 \equiv 0, 51 \equiv 2 \mod 7$.
- a) $\{(1,1),(2,1)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2\}$
  b) $\{(1,1),(1,2)\} \subseteq \{1,2\}^2$
  c) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \subseteq \{1,2\}^2$
  d) $\{(1,1),(2,2)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2\}$
- $\cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}, \sin(-\frac{\pi}{12}) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
- „$\Leftarrow$“: Sei $\frac{a}{b} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$, für $e := \frac{a}{n} = \frac{b}{m}$ gilt dann $a = ne$ und $b = me$. Daher ist $f(x + \frac{2\pi}{e}) = \sin(ax + 2\pi n) + \sin(bx + 2\pi m) = f(x)$ periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{e}$.
  „$\Rightarrow$“: Mit f sind auch die Ableitungen f', f'' periodisch mit derselben Periode p, also auch $f(x) + \frac{1}{b^2}f''(x) = (1 - \frac{a^2}{b^2})\sin(ax)$ und $f(x) + \frac{1}{a^2}f''(x) = (1 - \frac{b^2}{a^2})\sin(bx)$. Daraus folgt $ap = 2\pi n$ und $bp = 2\pi m$ für gewisse $n, m \in \mathbb{Z}$, also $\frac{a}{b} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Aufgabe 34

(1) R_1 ist reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, nicht transitiv, nicht total.
R_2 ist nicht reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, transitiv, nicht total.



(2) Im Graphen wurden reflexive und transitive Kanten zur Übersichtlichkeit weggelassen. Es gibt 4 Wege der Länge 6, also 4 sechselementige Ketten in M.



(3) a) Keine Abbildung (nicht rechtseindeutig), rechtsvollständig, nicht linkseindeutig.
b) Abbildung, nicht rechtsvollständig, linkseindeutig.
c) Keine Abbildung (nicht rechtseindeutig), rechtsvollständig, nicht linkseindeutig.
d) Keine Abbildung (nicht linksvollständig), nicht rechtsvollständig, linkseindeutig.
e) Abbildung, rechtsvollständig, nicht linkseindeutig.
f) Abbildung, rechtsvollständig, linkseindeutig.

Aufgabe 35

Für zwei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ definieren wir die Relationen

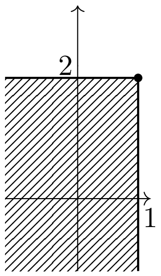
$$(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2 \text{ und } y_1 \leqslant y_2,$$
$$(x_1, y_1) \leqslant_L (x_2, y_2) \Leftrightarrow \text{Entweder } x_1 < x_2 \text{ oder } (x_1 = x_2 \text{ und } y_1 \leq y_2).$$

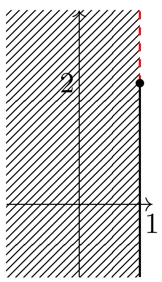
a) Die Ordnungsrelation $\leqslant$ überträgt sich *komponentenweise*: Gilt zum Beispiel $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \leqslant (x_1, y_1)$, also $x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2, x_2 \leqslant x_1, y_2 \leqslant y_1$, so folgt aus der Antisymmetrie auf $\mathbb{R}$ sowohl $x_1 = x_2$ als auch $y_1 = y_2$, also $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$; analog beweist man Reflexivität und Transitivität. $\leqslant$ ist auf $\mathbb{R}^2$ nicht total, denn es gilt weder $(1, 2) \leqslant (2, 1)$ noch $(2, 1) \leqslant (1, 2)$. □

b) Stets gilt $(x, y) \leqslant_L (x, y)$, denn $x = x$ und $y \leqslant y$ (Reflexivität). Aus $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_2, y_2)$ folgt $x_1 < x_2$ oder $x_1 = x_2$, also $x_1 \leqslant x_2$; zusammen mit $(x_2, y_2) \leqslant_L (x_1, y_1)$ gilt auch $x_2 \leqslant x_1$, also $x_1 = x_2$. Aus $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_1, y_2)$ folgt nun $y_1 \leqslant y_2$ und aus $(x_1, y_2) \leqslant_L (x_1, y_1)$ entsprechend $y_2 \leqslant y_1$; also ist $y_1 = y_2$ und $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (Antisymmetrie). Nun gelte $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_2, y_2), (x_2, y_2) \leqslant_L (x_3, y_3)$ $(*)$, dann ist wieder $x_1 \leqslant x_2$ und $x_2 \leqslant x_3$, also $x_1 \leqslant x_3$. Fall 1: $x_1 < x_3$. Dann ist nach Definition $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_3, y_3)$. Fall 2: $x_1 = x_3$. Dann ist $x_1 = x_2 = x_3$ und aus $(*)$ folgt $y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3$, also $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_1, y_3)$ (Transitivität). Damit ist $\leqslant_L$ eine Ordnungsrelation. Für die Totalität seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Fall 1: $x_1 \neq x_2$. Dann gilt $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$, also $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_2, y_2)$ oder $(x_2, y_2) \leqslant_L (x_1, y_1)$. Fall 2: $x_1 = x_2$. Dann gilt $y_1 \leqslant y_2$ oder $y_2 \leqslant y_1$, also $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_1, y_2)$ oder $(x_1, y_2) \leqslant_L (x_1, y_1)$. □
$\leqslant_L$ sortiert wie im Lexikon zuerst nach dem ersten „Buchstaben" x, bei Gleichheit nach dem zweiten „Buchstaben" y; dasselbe lässt sich auch für Wörter der Länge n auf $\mathbb{R}^n$ definieren.

c) $\leqslant$ ist verträglich mit Addition und Multiplikation: Aus $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ folgt $(x_1 + x, y_1 + y) \leqslant (x_2 + x, y_2 + y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für $\lambda \geqslant 0$ folgt $(\lambda x_1, \lambda y_1) \leqslant (\lambda x_2, \lambda y_2)$.
$\leqslant_L$ ist ebenfalls mit beiden verträglich: Aus $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_2, y_2)$ folgt $x_1 + x < x_2 + x$ bzw. $x_1 + x = x_2 + x$ und $y_1 + x \leqslant y_2 + x$, also $(x_1 + x, y_1 + y) \leqslant_L (x_2 + x, y_2 + y)$. Für $\lambda = 0$ ist $(0, 0) \leqslant_L (0, 0)$ immer richtig, für $\lambda > 0$ folgt $\lambda x_1 < \lambda x_2$ bzw. $\lambda x_1 = \lambda x_2$ und $\lambda y_1 \leqslant \lambda y_2$, also ebenfalls $(\lambda x_1, \lambda y_1) \leqslant_L (\lambda x_2, \lambda y_2)$. □

d) $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ bedeutet $x_1 \leqslant x_2$ und $y_1 \leqslant y_2$. Ist $x_1 < x_2$ so folgt $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_2, y_2)$; ist $x_1 = x_2$, so folgt mit $y_1 \leqslant y_2$ ebenfalls $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_1, y_2)$. □





Aufgabe 36

a) Zum Ereignis A gehören die Ergebnisse $(2, 1), (4, 1), (9, 1), (9, 6), (9, 8)$, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{36}$ auftreten; also ist $\mathbb{P}(A > B) = \frac{5}{9}$. Genauso berechnet man auch $\mathbb{P}(B > C) = \frac{5}{9}$ und $\mathbb{P}(C > A) = \frac{5}{9}$.

b) Nein: Obwohl A in dieser Relation zu B steht und B zu C, ist $\mathbb{P}(A > C) = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$.

Aufgabe 37

$f, D, \lceil\cdot\rceil, \pi$ und w_3 sind wohldefiniert. $\mathrm{id} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ ist nicht linksvollständig ($0 \notin \mathbb{N}$), b ist nicht rechtseindeutig ($\frac{1}{2} \mapsto 2, \frac{2}{4} \mapsto 4$), g ist nicht linksvollständig ($g(1)$ ist nicht definiert), t ist nicht rechtseindeutig ($6 \mapsto 2, 6 \mapsto 3$), h ist nicht linksvollständig ($h(1,1)$ ist nicht definiert).

Aufgabe 38

a) $(x-2)^2 - 9 = (x+1)(x-5)$, daher $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$.

b) $f(x) = x^2 + 4 + \frac{20-4x}{(x+1)(x-5)} = x^2 + 4 - \frac{4}{x+1}$. Die Definitionslücke $x = -1$ ist also ein Pol, $x = 5$ ist hebbar durch $f(5) = \frac{85}{3}$. Die Asymptote von f für $x \to \pm\infty$ ist $x^2 + 4$.

c) Berechne $f'(x) = \frac{2(x^3+2x^2+x+2)}{(x+1)^2}$, es gilt $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1) > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ und genauso mit „$<$“. Also ist f streng monoton wachsend auf $[-2, -1) \cup (-1, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(-\infty, -2]$. (An der Stelle $x = -2$ hat f ein lokales Minimum $f(-2) = 12$.)

d) $f(D) = \mathbb{R}$, $f((-\infty, -1))^C = (-\infty, 12)$ $(\neq f((-\infty, -1)^C) = \mathbb{R})$, $f((-1, 0] \cup [7, \infty)) = f((-1, 0]) \cup f([7, \infty)) = (-\infty, 0] \cup [\frac{105}{2}, \infty)$, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $f^{-1}([12, \infty)) \cap f^{-1}((0, 15]) = f^{-1}([12, 15]) = [-3, 1 - \sqrt{6}] \cup [3, 1 + \sqrt{6}]$.

Aufgabe 40

a) Es gilt $f_g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f_g(x), f_u(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -f_u(x)$ und $f_g(x) + f_u(x) = \frac{1}{2} \cdot 2f(x) = f(x)$. $\square$

b) Aus $g + u = f_g + f_u$ folgt $g - f_g = f_u - u$. Die linke Funktion ist gerade, die rechte ungerade; beides ist aber nur die Nullfunktion ($f(x) = f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$). Also ist $g - f_g = f_u - u = 0$, das bedeutet $f_g = g$ und $f_u = u$. $\square$

c) Für $f(x) = e^x$ ist $f_g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ und $f_u(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$.

Aufgabe 41

a) Wir berechnen $\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) = \frac{1}{4} \cdot 2(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh(x+y)$ und genauso $\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) = \frac{1}{4} \cdot 2(e^{x+y} + e^{-x-y}) = \cosh(x+y)$. $\square$

b) Aus dem Additionstheorems für den Cosinus folgt $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$ und daher $\cos((n+1)\vartheta) + \cos((n-1)\vartheta) = 2\cos(n\vartheta)\cos(\vartheta)$. $\square$

c) Es ist $T_0(\cos(\vartheta)) = 1, T_1(\cos(\vartheta)) = \cos(\vartheta)$, also $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$. Aus b) folgt $T_{n+1}(\cos(\vartheta)) = 2\cos(\vartheta)\cos(n\vartheta) - \cos((n-1)\vartheta) = 2\cos(\vartheta)T_n(\cos(\vartheta)) - T_{n-1}(\cos(\vartheta))$, also die Rekursionsformel $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit berechnet man $T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$.

d) Nach der Rekursionsformel in c) ist $T_n(x)$ ein Polynom vom Grad n, hat also höchstens n Nullstellen. Tatsächlich sind die n Zahlen $\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi) \in [0, 1]$ für für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ alle verschieden es gilt $T_n(\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)) = \cos((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 0$. $\square$

Aufgabe 39

a) d bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung (positiv: nach oben, negativ: nach unten), c eine Verschiebung in x-Richtung (positiv: nach links, negativ: nach rechts). $|b| > 1$ bewirkt eine Stauchung, $0 < |b| < 1$ eine Streckung entlang der x-Achse, $b < 0$ zusätzlich eine Spiegelung an der Geraden $x = -c$. $|a| > 1$ bewirkt eine Streckung, $0 < |a| < 1$ eine Stauchung entlang der y-Achse, $a < 0$ zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse. Eine Verkettung dieser Parameter baut man von innen nach außen auf (c, b, a, d).

b)