

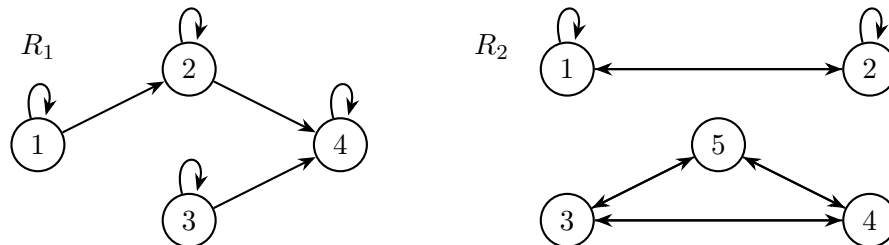
Übungsblatt 4.1

Verständnisaufgaben

- Welche dieser Relationen sind reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv oder total?
 - a) „ x kennt y persönlich“ für Menschen x, y .
 - b) „ $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind linear unabhängig“ für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.
 - c) $n \equiv m \pmod{9}$ für ganze Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$.
 - d) $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ für Zahlen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - e) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ für Zahlen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - f) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ für Zahlen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.¹
- Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Relation $R \subseteq A^2$, die
 - a) symmetrisch und antisymmetrisch ist.
 - b) symmetrisch und total ist.
 - c) transitiv, aber nicht reflexiv ist.
 - d) reflexiv, aber weder symmetrisch noch transitiv ist.
- Bestimmen Sie die Restklassen der Zahlen 8, -8, 28, 51 modulo 4 und modulo 7.
- Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Relation $R \subseteq A \times B$, die
 - a) rechtseindeutig ist,
 - b) rechtsvollständig und linkseindeutig ist,
 - c) links- und rechtsvollständig ist,
 - d) rechtsvollständig, links- und rechtseindeutig ist,
 aber keine der anderen Eigenschaften in Definition 4.7 besitzt.
- Berechnen Sie $\cos(-\frac{3\pi}{4})$, $\sin(\frac{5\pi}{6})$, $\tan(\frac{\pi}{3})$, $\sin(-\frac{\pi}{12})$.
- Seien $a, b \neq 0$. Zeigen Sie: Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$ ist genau dann periodisch, wenn $\frac{a}{b}$ rational ist.¹ *Hinweis:* Betrachten Sie für „ $\Rightarrow$ “ die Perioden der Funktion $f + \frac{1}{b^2}f''$.

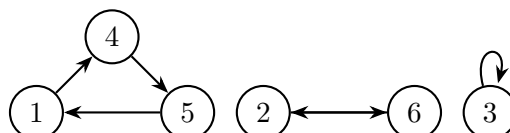
Aufgabe 34

- (1) Prüfen Sie anhand der Graphen, ob die Relationen R_1 und R_2 reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv oder total sind. Ergänzen Sie R_1 zu einer Ordnungs- und R_2 zu einer Äquivalenzrelation.



- (2) Zeichnen Sie den Graphen der Teilbarkeitsrelation auf der Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Wie viele sechselementige Ketten (total geordnete Teilmengen) gibt es in M ?
- (3) Welche dieser Relationen sind Abbildungen? Welche sind rechtsvollständig, welche linkseindeutig?
- a) Die Teilmenge $R = \{(1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 2)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$.
 - b) Die Zuordnung jedes Raumes x im Mathematikgebäude zur Raumnummer y .
 - c) Die Teilmenge $\{(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] : |x - y| \leq 1\} \subseteq [-1, 1] \times [0, 1]$.
 - d) Die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto (x^3 + x^2 + x + 1)^{-1}$ auf $\mathbb{R}$.
 - e) Folgende Tabelle auf $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\} \times \{-1, 0, 1\}$:

$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
-1	0	-1	1	0
 - f) Folgender Graph:



¹ a, b sind also *kommensurabel*: Sie haben ein gemeinsames Maß e , sodass $a = ne$ und $b = me$ für gewisse $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 35

Für zwei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ definieren wir die Relationen

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ und } y_1 \leq y_2, \\ (x_1, y_1) \leq_L (x_2, y_2) \Leftrightarrow \text{Entweder } x_1 < x_2 \text{ oder } (x_1 = x_2 \text{ und } y_1 \leq y_2).$$

- a) Zeigen Sie, dass $\leq$ eine (partielle) Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}^2$ ist, aber nicht total.
- b) Zeigen Sie, dass $\leq_L$ eine totale Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}^2$ ist. Wieso heißt $\leq_L$ *lexikographische Ordnung*?
- c) Sind $\leq$ und $\leq_L$ verträglich mit (komponentenweiser) Addition und Multiplikation?
- d) Stellen Sie in einem Koordinatensystem die Mengen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \leq (1, 2)\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \leq_L (1, 2)\}$$

dar und begründen Sie die Implikation $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) \leq_L (x_2, y_2)$ für alle Punkte des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 36

Wir betrachten drei spezielle sechsseitige Würfel (*Efron-Würfel*) mit den Augenzahlen

$$A : 2, 2, 4, 4, 9, 9$$

$$B : 1, 1, 6, 6, 8, 8$$

$$C : 3, 3, 5, 5, 7, 7$$

- a) Alle drei Würfel werden je einmal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A eine größere Augenzahl als B zeigt, und analog die Wahrscheinlichkeiten von $B > C$ und $C > A$.
- b) Ist die Relation „ x würfelt häufiger die größere Augenzahl als y “ transitiv auf $\{A, B, C\}$?

Aufgabe 37

Welche der folgenden Abbildungen sind wohldefiniert?

$$f : [-2, 3] \cup \{4\} \rightarrow [0, 16], f(x) = x^2,$$

$$\text{id} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N},$$

$$b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, b(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, D(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\sin(1 - \sqrt{x})},$$

$$[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, [x] := \min\{k \in \mathbb{Z} : x \leq k\},$$

$$t : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, t(z) = \begin{cases} 2, & \text{falls } 2|z, \\ 3, & \text{falls } 3|z, \\ 5, & \text{falls } 5|z, \dots \end{cases}$$

$$\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x,$$

$$w_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto x, \text{ wobei } x \text{ die eindeutige}$$

$$h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\text{Lösung der Gleichung } x^3 = y \text{ ist.}$$

$$h(x, y) = \begin{cases} \log(x - y), & \text{falls } x > y, \\ \log(y - x), & \text{falls } y > x. \end{cases}$$

Aufgabe 38

Diskutieren Sie die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 - x^2 - 20x}{(x-2)^2 - 9}$, indem Sie folgendes tun:

- a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D , auf dem f wohldefiniert ist.
- b) Entscheiden Sie mithilfe einer Partialbruchzerlegung, welche Definitionslücken von f hebbar und welche Pole sind. Geben Sie eine stetige Fortsetzung von f an und bestimmen Sie die Asymptote.
- c) Untersuchen Sie, in welchem Bereich f (streng) monoton wachsend/ fallend ist.
- d) Bestimmen Sie das Bild von f und die Mengen

$$f((-\infty, -1))^C, \quad f((-1, 0] \cup [7, \infty)), \quad f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}([12, \infty)) \cap f^{-1}((0, 15]).$$

Aufgabe 39

- a) Aus einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ werde die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = af(b(x+c)) + d$ konstruiert. Erläutern Sie den Einfluss der Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ auf das Verhältnis der Graphen von f und g .
- b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 5 - x^2 - 4x$$

$$f_2 : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \log(x+1)$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_3(x) = |(x+2)^2 - 1|$$

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_4(x) = ||x-1| - 2|$$

$$f_5 : \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f_5(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f_6 : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1], \quad f_6(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f_7 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad f_7(x) = 2^{3-|x|}$$

$$f_8 : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1], \quad f_8(x) = e^{-x^2}$$

$$f_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_9(x) = 2 - |1-x| - |x+2|$$

$$f_{10} : [-2, 8], \quad f_{10}(x) = -\sqrt{25 - (x-3)^2}$$

Aufgabe 40

Zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man geraden und ungeraden Teil $f_g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_g(x) := \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)), \quad f_u(x) := \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)).$$

- a) Zeigen Sie: f_g ist gerade, f_u ist ungerade und $f = f_g + f_u$.
- b) Beweisen Sie, dass die Zerlegung aus a) eindeutig ist: Sind $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerade und $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade Funktionen, sodass $g + u = f_g + f_u$ gilt, so folgt $g = f_g$ und $u = f_u$.
- c) Bestimmen Sie f_g und f_u für die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

Aufgabe 41

- a) Beweisen Sie für die Funktionen $\sinh$ und $\cosh$ aus Beispiel 4.11(8) die Additionstheoreme ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y), \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y). \end{aligned}$$

- b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\vartheta \in \mathbb{R}$ die Rekursionsformel

$$\cos((n+1)\vartheta) = 2 \cos(\vartheta) \cos(n\vartheta) - \cos((n-1)\vartheta).$$

- c) Die Polynome $T_n(x)$ mit der Eigenschaft $T_n(\cos(\vartheta)) = \cos(n\vartheta)$ heißen *Tschebyscheff-Polynome*. Bestimmen Sie $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ und finden Sie eine Rekursionsformel für $T_n(x)$.
- d) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat $T_n(x)$ genau die Nullstellen $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ für $k \in \{0, \dots, n-1\}$.