

Übungsblatt 3.2

Verständnisaufgaben

- Ist das eine Äquivalenzumformung? Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge davor und danach:

$$4x - x^2 = 4$$

$$0 = 0$$

$$4^x = (2^x - 1)^2$$

$$2^x = 2^x - 1$$

$$\sqrt{x-5} \leq \sqrt{x}$$

$$x-5 \leq x$$

$$x-3 = x+1$$

$$|x-3| = |x+1|$$

- Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$|x| = a,$$

$$x^2 = a,$$

$$x^3 = a,$$

$$\sqrt{x} = a.$$

- Seien $p, q \in \mathbb{R}$. In der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (*) ergänzen wir *quadratisch*:

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen und geben Sie jeweils die Lösungsmenge an:

$$(*) \text{ ist unlösbar} \Leftrightarrow p^2 < 4q,$$

$$(*) \text{ hat genau eine Lösung} \Leftrightarrow p^2 = 4q,$$

$$(*) \text{ hat genau zwei Lösungen} \Leftrightarrow p^2 > 4q.$$

Formulieren Sie analoge Aussagen für die quadratische Ungleichung $x^2 + px + q \leq 0$.

- Lesen Sie jeweils die Lösungsmenge ab:

$$|x+5| = |x-1|$$

$$|x+2| \leq |x-1|$$

$$3x^2 \geq 75$$

$$-|4x+1| = 3$$

$$|x-4| + |2-x| \leq 3$$

$$x^2 + 10 \leq 0$$

$$|5x-10| = 5$$

$$|x+1| \geq 2$$

$$(x-3)^2 < 4$$

- Begründen Sie: Jedes Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine (reelle) Nullstelle. Hat es immer auch eine rationale Nullstelle?

Aufgabe 26

- a) Sei $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie nacheinander folgende Aussagen:

- Jede ganzzahlige Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Z}$ dieses Polynoms ist ein Teiler von a_0 .
- Ist $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine rationale Nullstelle dieses Polynoms und vollständig gekürzt, so ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n . (*Lemma von Gauß*)
- Ist $a_n = 1$, so sind alle rationalen Nullstellen dieses Polynoms ganzzahlig und ein Teiler von a_0 .

- b) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Polynoms $6x^4 - 37x^3 + 59x^2 - 3x - 9$.

- c) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ keine rationalen Nullstellen besitzt.

Bestimmen Sie bei allen folgenden (Un-)Gleichungen zunächst die maximale Grundmenge G und dann die Lösungsmenge $\mathcal{L}$.

Aufgabe 27

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{3}x - 4 \leq \frac{1}{5}x & x^3 + 9x = 6x^2 & \frac{2x-1}{2} + \frac{3x+2}{4} + \frac{5x+3}{8} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{7x+3}{8} \\ 8x - 3 = 4x^2 & 5x^6 = 20x^4 & (x^2 - 4x - 5)(x^2 + 4) = 0 \\ 4x + 21 > x^2 & x^4 + 5x^2 = 36 & x^3 + 14x^2 + 49x > 0 \\ 16 + x^2 \leq 8x & x^2 + 12 > 6x & (2-x)(1+x) \geq (3-x)(4+x) \end{array}$$

Aufgabe 28

$$\begin{array}{llll} |3x-2| = |x| & |x+2| > |x-5| & |x-2| = \frac{1}{2}x - 4 & |2x+1| - |x-1| = 1 \\ 2|x-3| > 8 & \sqrt{3|x-1|} < 2 & 2+|x| = x & |2-|x+1|-|x-2|| = 1 \\ ||x|-2| < 1 & |3x-5| > 2|x+2| & |x-5| \geq x & |5x+3| - |3x-2| \geq 5 \\ |x^2-4x| > 0 & |2-|x+1|| = 1 & |2x-4| < 2-x & |2-|1-|x|| \leq 3 \end{array}$$

Aufgabe 29

$$\begin{array}{lll} \sqrt{|x-2|} = 2 & x + \sqrt{x^2-25} = 25 & 25 + 4\sqrt{5x+2} = 9\sqrt{5x+2} \\ 2-x = \sqrt{x} & \sqrt{x-9} + 2x = 3\sqrt{5x-1} & \sqrt{8x+1} - \sqrt{10x+6} = -1 \\ \sqrt{x-6} - 2 = \sqrt{x+10} & 7 + 3\sqrt{2x+4} = 16 & \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+7} = 4 \\ \sqrt{x+2} + 1 = -\sqrt{x} & \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1} & \sqrt[3]{7x^3-9x^2+3x} = \sqrt{2x^2-3x+1} + x \\ (8x+1)^{\frac{1}{10}} = (26x+1)^{\frac{1}{15}} & \sqrt[8]{x^2+6x+9} = 2 - \sqrt{x+3} & \sqrt{4x-9} + \sqrt{6x-7} = \sqrt{5x-3} + \sqrt{5x-13} \end{array}$$

Aufgabe 30

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{x-3} \leq 1 & \frac{3}{|x+2|} < 2-x & \frac{x^2-1}{x-1} = -x & 1 + \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-1} \\ \frac{3}{2x-4} \leq 2 & |x-2| \leq \frac{1}{x} - 2 & \frac{x-3}{x+1} > \frac{x+2}{x-1} & \frac{x-1}{x+1} \leq |x-2| \\ \frac{x-1}{x+1} < 1 & \frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2 & \frac{x+2}{2x-1} = \frac{4x-1}{x} & \frac{2x+1}{2x-2} + \frac{2x-3}{3x-3} > 1 \\ \frac{1}{x+3} < \frac{2}{x} & \frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1 & \frac{x}{x^2-4} = \frac{1}{x+1} & \frac{3}{2x-8} + \frac{1}{2x-4} < \frac{2}{x-3} \\ \frac{4x+3}{2x-1} \geq 2 & \left| \frac{x-3}{2x+4} \right| < 1 & \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{5}{2(x+1)} & 12 - \frac{2(4x-3)}{x-1} \leq \frac{3(4x-1)}{x-1} \end{array}$$

Aufgabe 31

$$\begin{array}{lll} 32 \cdot 16^{x+1} = 8^{x+2} \cdot 4^{x+4} & \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{8} & \log(x^2+2x+3) = \log 2 \\ 25^{10x} + 625 = 2 \cdot 5^{10x+2} & 5^{x-2} < 8 & \log_3(10x+7) - \log_3(4x+1) = \log_3(2x-1) \\ e^{2x} - 6 = 5e^x & 10 - 3 \cdot 2^x \geq 1 & \log_{100}(2x^4 - 10000) = \log_{10}(x^2) \\ 4^{6x} + 32 = 18 \cdot 4^{3x} & \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) \geq 3 & \log((x+1)^2) = \log x \\ e^x + e^{-x} = 2 & (x+1)(\log(ex) - 5) = 0 & x^{\log_2 x} + 32x^{-\log_2 x} = 18 \end{array}$$

Knobelaufgaben:

$$\frac{3^x + 2^x}{3^x - 2^x} = 7$$

$$4^{\sin^2 x} - 2^{\cos 2x} = -1$$

$$\sqrt{x + \sqrt{2x + \sqrt{4x + \sqrt{8x}}}} = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$$

Aufgabe 32

Skizzieren Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen im $\mathbb{R}^2$:

$$|x + y| < 1$$

$$x^2 \leq y^2$$

$$\frac{x}{y} \leq \frac{y}{x}$$

$$y + 2x - 3 < \frac{1}{2}y - x + 4$$

$$|x| + |y| \leq 1$$

$$y^2 \leq 4$$

$$x^2 \leq y \leq |x|$$

$$2y < 1 + |x - 1|$$

Aufgabe 33

Es seien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{1}$$

und $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \text{ erfüllt (1)}\}$ dessen Lösungsmenge. Ferner sei $\mathcal{L}_h$ die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS, also von (1) mit $b_1 = b_2 = 0$. Zeigen Sie nacheinander:

- Stets gilt $(0, 0) \in \mathcal{L}_h$.
- Sind $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathcal{L}_h$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt auch $(\lambda x_1, \lambda x_2) \in \mathcal{L}_h$ und $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathcal{L}_h$.
- Das homogene LGS ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\mathcal{L}_h = \{(0, 0)\}$.
- Sind $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathcal{L}$, so ist $(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \in \mathcal{L}_h$.
- Sei $(x_1, x_2) \in \mathcal{L}$. Dann ist jede Lösung $(y_1, y_2) \in \mathcal{L}$ von der Form $(y_1, y_2) = (x_1 + \tilde{x}_1, x_2 + \tilde{x}_2)$ mit einer Lösung $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{L}_h$.
- Das LGS (1) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\mathcal{L}_h = \{(0, 0)\}$.
Hinweis: Für die Richtung „ $\Leftarrow$ “ können Sie annehmen, dass eine Lösung von (1) existiert; dies wird für quadratische LGS in der Linearen Algebra bewiesen.