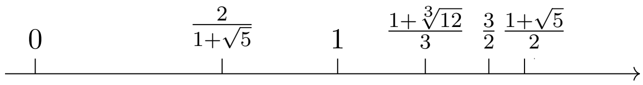
Übungsblatt 3.1 – Lösungshinweise

Verständnisaufgaben

- Die strikten Ungleichheitszeichen sind nicht antisymmetrisch ($a < b$ und $b < a$ können nicht zugleich auftreten), nicht reflexiv (niemals gilt $a < a$) und nicht total (Es gilt weder $1 < 1$ noch $1 > 1$). Transitivität und Verträglichkeit wurden in Satz 3.3 bewiesen.
- Es wird $0 < 1$ indirekt bewiesen. Aus $0 \geqslant 1$ folgt durch Addition von -1 auf beiden Seiten $-1 \geqslant 0$. Wegen der Verträglichkeit mit der Multiplikation können wir daher $-1 \geqslant 0$ mit -1 multiplizieren und erhalten $1 \geqslant 0$. Mit der Antisymmetrie und $0 \geqslant 1$ folgt daraus $0 = 1$, ein Widerspruch.
- Es ist $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) > \frac{1}{2}(1+\sqrt{4}) = \frac{3}{2}$ und daher $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{-1} < \frac{2}{3} < 1$. Genauso ist $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{12} < \sqrt[3]{27} = 3$ und daher $1 = \frac{1+2}{3} < \frac{1}{3}(1+\sqrt[3]{12}) < \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$.



- Zum Beispiel ist $867^2 = (1 \cdot 67 + 4 \cdot 200)^2 \leqslant (1^2+4^2) \cdot (67^2+200^2) = 17 \cdot 44489 = 756313$, tatsächlich gilt $867^2 = 751689$. Gleichheit erhalten wir genau dann, wenn $\binom{a}{b}$ und $\binom{c}{d}$ linear abhängig sind, zum Beispiel $867^2 = (1 \cdot 51 + 4 \cdot 204)^2 \leqslant (1^2+4^2)(51^2+204^2) = 751689$.
- a) Wahr: Aus $a, b < 0$ folgt $\frac{1}{b} < 0$ nach Satz 3.3(5) und daher $\frac{a}{b} > 0$ nach Satz 3.3(4).
  b) Falsch: Es ist $-2 \leqslant 0 \leqslant 1$, aber $-2+1 = -1 \leqslant 0$.
  c) Wahr: Haben a, b dasselbe Vorzeichen ($a, b \geqslant 0$ oder $a, b \leqslant 0$), so folgt $ab \geqslant 0$. Haben a, b verschiedene Vorzeichen ($a \leqslant 0 \leqslant b$ oder $b \leqslant 0 \leqslant a$), so folgt $ab \leqslant 0$.
  d) Wahr: Aus $a \leqslant b$ folgt $a + c \leqslant b + c$, aus $c \leqslant d$ folgt $c + b \leqslant d + b$, zusammen ergibt das $a + c \leqslant b + c \leqslant b + d$.
  e) Falsch: Es gilt $-1 \leqslant 0$, aber $(-1) \cdot (-1) > 0 \cdot 0$. (Wahr, wenn alle Zahlen nichtnegativ sind.)
  f) Falsch: Es gilt $|0| \leqslant |-1|$, aber $|0+1| > |-1+1|$.
  g) Wahr: Multiplikation der Ungleichung $|a| \leqslant |b|$ mit $|c| \geqslant 0$ ergibt $|a| \cdot |c| = |ac| \leqslant |bc| = |b| \cdot |c|$.
  h) Wahr: Es gilt $a \leqslant |a|, -a \leqslant |a|$ und in einem Falle auch Gleichheit, also $\max\{a, -a\} = |a|$.
  i) Wahr: Haben a, b dasselbe Vorzeichen, so ist $a = b$, andernfalls $a = -b$.
  j) Wahr: Das folgt aus Satz 3.3(6).

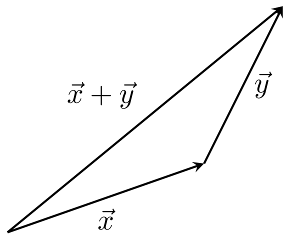
Aufgabe 19

a) Wegen Satz 3.9(1) ist $d(a,b) = |a-b| \geqslant 0$ und $0 = d(a,b) = |a-b| \Leftrightarrow 0 = a-b \Leftrightarrow a = b$. Nach (3) ist $d(a,b) = |a-b| = |(-1)(b-a)| = |-1| \cdot |b-a| = |b-a| = d(b,a)$. Und zuletzt ist nach (4) $d(a,b) = |a-b| = |(a-c)-(b-c)| \leqslant |a-c| + |b-c| = d(a,c) + d(b,c)$. $\square$

b) Aus der Dreiecksungleichung folgt $d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$ und genauso $d(b,c) \leqslant d(a,b) + d(a,c)$. Das bedeutet $-d(a,b) \leqslant d(a,c) - d(b,c) \leqslant d(a,b)$, nach Satz 3.9(2) also $|d(a,c) - d(b,c)| \leqslant d(a,b)$. $\square$

c) Offenbar gilt $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geqslant 0$ und $0 = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \Leftrightarrow 0 = x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow 0 = x_1 = x_2 \Leftrightarrow \vec{x} = \binom{0}{0}$, siehe Satz 3.5(2). Weiter ist $\|\lambda\vec{x}\| = \|\binom{\lambda x_1}{\lambda x_2}\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2} = |\lambda|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\lambda|\|\vec{x}\|$.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in Satz 3.5(4): Es gilt $x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant \sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ und daher



$$\begin{aligned}
\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \right\|^2 &= (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) + y_1^2 + y_2^2 \\
&\leqslant \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \,. \; \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 20

$\left(\frac{17}{8}, \infty\right)$ $\quad (0,\infty)$ $\quad (0, 1+\sqrt{2})$ $\quad [1,\infty)$ $\quad (0, \log\left(\frac{2}{3}\right))$ $\quad [-1,1]$

Aufgabe 21

a) Haben a, b dasselbe Vorzeichen $\pm$ (also $ab \geqslant 0$), so ist $|a+b| = \pm(a+b) = \pm a \pm b = |a|+|b|$. Umgekehrt: Aus $|a+b| = |a|+|b|$ folgt $(a+b)^2 = |a+b|^2 = (|a|+|b|)^2 = a^2 + 2|a||b| + b^2$, also $ab = |a||b| \geqslant 0$. $\square$

b) Nach der (umgekehrten) Dreiecksungleichung ist $||a-b|-|c-d|| \leqslant |a-b-c+d| \leqslant |a-c|+|b-d|$. $\square$

c) Vergleiche mit Satz 3.5(3): Es ist $a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$. $\square$

d) In c) gilt Gleichheit genau dann, wenn $a = b = 0$; also gilt „$>$“ genau dann, wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. $\square$

e) Es ist $0 \leqslant (\varepsilon a - \frac{b}{\varepsilon})^2 = \varepsilon^2 a^2 - 2ab + \frac{b^2}{\varepsilon^2}$. $\square$

f) Aus e) folgt $(a+b)^2 \leqslant a^2 + (\varepsilon^2 a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon^2}) + b^2 = (1+\varepsilon^2)a^2 + (1+\frac{1}{\varepsilon^2})b^2$. $\square$

g) Dividiere die Ungleichung $2ab \leqslant a^2 + b^2$ aus Satz 3.5(3) durch ab. $\square$

h) Die *Nesbitt-Ungleichung* ist trickreich: Nach g) gilt $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geqslant 2$ und dasselbe auch, wenn wir (a,b,c) durch (b,c,a) oder (c,a,b) ersetzen. Addieren wir diese drei Ungleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{c+a}{a+b} + \frac{a+b}{c+a} &\geqslant 6 \\
2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) + \frac{b+c}{b+c} + \frac{a+b}{a+b} + \frac{c+a}{c+a} &\geqslant 6 \\
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &\geqslant \frac{3}{2}. \; \square
\end{aligned}$$

i) Multiplikation mit $bd > 0$ ergibt $ad \leqslant bc$. Daraus folgt einerseits $ad + ab \leqslant bc + ab \Leftrightarrow \frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d}$ und andererseits $ad + cd \leqslant bc + cd \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d}$. (*Medianten-Ungleichung*) $\square$

j) Nach Satz 3.5(3) ist $a_j a_k \leqslant \frac{1}{2}(a_j^2 + a_k^2)$ und damit $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{2024}a_{2025} + a_{2025}a_1 \leqslant \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_{2025}^2 + a_1^2) = a_1^2 + \ldots + a_{2025}^2$. $\square$

Aufgabe 22

a) $|a_n - a| = |\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{-1}{n+1}| = \frac{1}{n+1}$. Für $n \to \infty$ wird $n+1$ immer größer und $\frac{1}{n+1}$ geht gegen Null.

b) $\frac{1}{n+1} < 10^{-4} \Leftrightarrow n > 10^4 - 1$, wähle also $n_0 = 10^4$. Für alle $n \geqslant n_0$ gilt dann $|a_n - a| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n_0+1} = \frac{1}{10^4+1} < 10^{-4}$, also $|a_n - a| < 10^{-4}$.

c) Sei $\varepsilon > 0$, wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Für alle $n \geqslant n_0$ gilt dann $|a_n - a| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n_0+1} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon$. $\square$

Aufgabe 23

a) $\max\{a,b,c\} = 3\sqrt{2}, A(a,b,c) = 1+\sqrt{2}, G(a,b,c) = \sqrt{2}\sqrt[3]{3}, H(a,b,c) = \frac{18}{9+\sqrt{2}}, \min\{a,b,c\} = 1$.

b) Wegen $\sqrt{2} \leqslant 9$ ist $\min\{a,b,c\} = \frac{18}{9+9} \leqslant H(a,b,c)$. Wegen $\sqrt{2} \leqslant \sqrt[3]{3}$ ist $H(a,b,c) \leqslant 2 \leqslant G(a,b,c)$. Wegen $(1+\frac{1}{\sqrt{2}})^3 = 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \geqslant 3$ ist $G(a,b,c) \leqslant \sqrt{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) = A(a,b,c)$. Wegen $1 \leqslant 2\sqrt{2}$ ist schließlich $A(a,b,c) \leqslant \max\{a,b,c\}$. $\square$

c) Für *alle* $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leqslant \max\{a,b\}$ und $b \leqslant \max\{a,b\}$, also $a+b \leqslant 2\max\{a,b\}$. Nun seien $a, b \geqslant 0$.
<u>Fall 1:</u> Ist $a = 0$ oder $b = 0$, so sind die restlichen Ungleichungen $0 \leqslant 0 \leqslant 0 \leqslant \frac{a+b}{2}$ offenbar richtig.
<u>Fall 2:</u> $a, b > 0$. Die Ungleichungen zwischen den Mitteln entsprechen Satz 3.5(3): Aus $4ab \leqslant (a+b)^2$ folgt $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ und $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}$. Die letzte Ungleichung sieht man so: Aus $0 < \min\{a,b\} \leqslant a, b$ folgt $0 < \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{\min\{a,b\}}$ mit Satz 3.3(5); das bedeutet $0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{2}{\min\{a,b\}}$. □
Ist eine Ungleichungen eine Gleichheit, so ist $a = b$ und alle Ungleichungen sind Gleichheiten. Der Beweis für n Zahlen $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ ist übrigens wesentlich schwieriger.

d) Wir beobachten zunächst $H(a_1, \ldots, a_n)^{-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) = A\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$ und genauso auch $\log G(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}\left(\log(a_1) + \ldots + \log(a_n)\right) = A(\log(a_1), \ldots, \log(a_n))$. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}
A(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) &= \frac{1}{n}\left(\lambda a_1 + \ldots + \lambda a_n\right) = \lambda A(a_1, \ldots, a_n), \\
G(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) &= (\lambda a_1 \cdot \ldots \cdot \lambda a_n)^{\frac{1}{n}} = (\lambda^n)^{\frac{1}{n}} (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = \lambda G(a_1, \ldots, a_n), \\
H(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) &= n\left(\frac{1}{\lambda a_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda a_n}\right)^{-1} = n\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-1}\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)^{-1} = \lambda H(a_1, \ldots, a_n). \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 24

a) $Q(a,b,c) = \sqrt{\frac{23}{3}}, \sigma = \sqrt{\frac{14}{3} - 2\sqrt{2}}$ und daher $\sigma^2 + (1+\sqrt{2})^2 = \frac{14}{3} - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = \frac{23}{3} = Q(a,b,c)^2$.

b) Nach Satz 3.5(3) ist $a + b \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$, daraus folgt $A(a,b) = \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = Q(a,b)$. Für die zweite Ungleichung sei etwa $0 \leqslant a \leqslant b$, dann ist $Q(a,b) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{b^2+b^2} = b = \max\{a,b\}$. □

c) Aus $\sigma = 0$ folgt $(a_1 - \overline{a})^2 = \ldots = (a_n - \overline{a})^2 = 0$, also $a_1 = \ldots = a_n = \overline{a}$.

d) Wir verwenden Summenschreibweise und berechnen

$$\begin{aligned}
n\sigma^2 &= \sum_{k=1}^{n}(a_k - \overline{a})^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 - 2\overline{a}a_k + \overline{a}^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\overline{a}\sum_{k=1}^{n} a_k + n\overline{a}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2n\overline{a}^2 + n\overline{a}^2 = nQ(a_1, \ldots, a_n)^2 - n\overline{a}^2,
\end{aligned}$$

daraus folgt $Q(a_1, \ldots, a_n)^2 = \sigma^2 + \overline{a}^2$. □

Aufgabe 25

Alle Aussagen sind symmetrisch bezüglich a, b. Eine dieser Zahlen ist stets die kleinere (größere), daher können wir *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* (o.B.d.A.) $a \leqslant b$ annehmen.

- Aus $a \leqslant b$ folgt $-a \geqslant -b$ und daher $\min\{-a,-b\} = -b = -\max\{a,b\}$.
- Es ist $\max\{\max\{a,b\},c\} = \max\{b,c\} = \max\{a,b,c\}$.
- Aus $a \leqslant b$ folgt $a + c \leqslant b + c$ und daher $\max\{a+c, b+c\} = b + c = \max\{a,b\} + c$.
- Aus $a \leqslant b$ folgt $\lambda a \leqslant \lambda b$ und daher $\max\{\lambda a, \lambda b\} = \lambda b = \lambda\max\{a,b\}$.
- Aus $a \leqslant b = \max\{a,b\} \leqslant c$ folgt $a \leqslant c$ und $b \leqslant c$. Umgekehrt folgt mit $a, b \leqslant c$ sofort $\max\{a,b\} = b \leqslant c$.
- Gilt $b = \max\{a,b\} \geqslant c$, so ist die rechte Aussage wahr. Gilt umgekehrt $b \geqslant c$ oder $a \geqslant c$, so folgt aus $b \geqslant a$ sicher $\max\{a,b\} = b \geqslant c$. □

In den ersten vier Aussagen kann man max durch min ersetzen und in beiden Fällen die Zahlen a, b durch $a_1, \ldots, a_n$; in der zweiten Aussage entsteht dadurch eine n-fache Verkettung. Die Analoga zu den letzten beiden Aussagen lauten

$$\begin{aligned}
&\max\{a_1, \ldots, a_n\} \leqslant c \Leftrightarrow \forall i : a_i \leqslant c \qquad && \max\{a_1, \ldots, a_n\} \geqslant c \Leftrightarrow \exists i : a_i \geqslant c \\
&\min\{a_1, \ldots, a_n\} \leqslant c \Leftrightarrow \exists i : a_i \leqslant c && \min\{a_1, \ldots, a_n\} \geqslant c \Leftrightarrow \forall i : a_i \geqslant c
\end{aligned}$$