

Übungsblatt 3.1

Verständnisaufgaben

- Welche Anordnungsaxiome sind für $<$ und $>$ verletzt? Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel.
- Was wird hier aus den Anordnungsaxiomen hergeleitet? Ergänzen Sie die fehlenden Argumente:

Annahme: $0 \geq 1$. Dann $-1 \geq 0 \Rightarrow 1 = (-1)(-1) \geq 0 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow 1 = 0$. $\nexists \square$

- Tragen Sie die folgenden Zahlen *ohne Taschenrechner* auf der Zahlengeraden ein:

$$1 \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \qquad \frac{1 + \sqrt[3]{12}}{3}$$

- Schätzen Sie 867^2 mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ab, indem Sie eine Zerlegung der Form $867 = ac + bd$ wählen. Finden Sie eine solche Zerlegung, dass die Ungleichung zur Gleichung wird.
- Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
 - Der Quotient zweier negativer Zahlen ist positiv.
 - Die Summe zweier Zahlen ist nur dann nichtpositiv, wenn beide Summanden nichtpositiv sind.
 - Es gilt $ab \geq 0$ genau dann, wenn a und b dasselbe Vorzeichen haben.
 - Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$.
 - Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $ac \leq bd$.
 - Aus $|a| \leq |b|$ folgt $|a + c| \leq |b + c|$.
 - Aus $|a| \leq |b|$ folgt $|ac| \leq |bc|$.
 - Stets ist $|a|$ die größere der beiden Zahlen a und $-a$.
 - Es gilt $|a| = |b|$ genau dann, wenn $a = b$ oder $a = -b$.
 - Es gilt $a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow |a| \leq |b|$.

Aufgabe 19

- Aufgrund der Eigenschaften in Satz 3.9(1), (3), (4) nennt man den Betrag eine *Norm* und definiert die *Distanz* $d(a, b) := |a - b|$. Zeigen Sie nur mithilfe dieser Eigenschaften die Aussagen
 - $d(a, b) \geq 0$. Dabei ist $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$. (*positiv definit*)
 - $d(a, b) = d(b, a)$. (*Symmetrie*)
 - $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$. (*Dreiecksungleichung*)
- Beweisen Sie für jede Distanz, die die Eigenschaften aus a) hat, die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|d(a, c) - d(b, c)| \leq d(a, b).$$

- Die Länge eines Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Zeigen Sie: Diese Länge ist eine Norm auf $\mathbb{R}^2$, für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt also:
 - $\|\vec{x}\| \geq 0$. Dabei ist $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (*positiv definit*)
 - $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$. (*Homogenität*)
 - $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. (*Dreiecksungleichung*)

Interpretieren Sie die Dreiecksungleichung geometrisch.

Aufgabe 20

Es seien $x > \frac{1}{2}$ und $y \leq -1$. Bestimmen Sie jeweils das kleinste Intervall, in dem die Werte folgender Terme liegen. *Beispiel:* Es ist $\{x^2 : x \geq \frac{1}{2}\} = [\frac{1}{4}, \infty)$.

$$\frac{x^2}{2} - 2y \quad \frac{1}{4x^2 - 1} \quad 4^{y+1} + 2^{1-x} \quad \sqrt{y^2 - 1} - y \quad \log\left(\frac{1}{x-y}\right) \quad \sin(x^2 + y^2)$$

Aufgabe 21

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen und Aussagen:¹

- In Ergänzung zur Dreiecksungleichung: Es ist $|a + b| = |a| + |b|$ genau dann, wenn $ab \geq 0$.
- Stets gilt $||a - b| - |c - d|| \leq |a - c| + |b - d|$.
- Stets gilt $a^2 - ab + b^2 \geq 0$.
- In c) gilt „ $>$ “ genau dann, wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.
- Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $2ab \leq \varepsilon^2 a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon^2}$.
- Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $(a+b)^2 \leq (1+\varepsilon^2)a^2 + (1+\frac{1}{\varepsilon^2})b^2$.
- Aus $a, b > 0$ folgt $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
- Aus $a, b, c > 0$ folgt $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.
- Ist $bd > 0$ und $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, so folgt $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$.
- Stets gilt $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2024} a_{2025} + a_{2025} a_1 \leq a_1^2 + \dots + a_{2025}^2$.

Aufgabe 22

Die Folge $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ hat das Bildungsgesetz $a_n = \frac{n}{n+1}$. Es ist naheliegend, dass sich die Folgenglieder a_n mit wachsendem Folgenindex n einem Grenzwert $a = 1$ annähern.

- Berechnen Sie den Abstand $|a_n - a|$ und begründen Sie, dass er mit wachsendem n beliebig klein wird.
- Bestimmen Sie einen Index n_0 , ab dem $|a_n - a| < 10^{-4}$ für alle $n \geq n_0$ gilt.
- Beweisen Sie: Zu jedem Abstand $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_0 , sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Bemerkung: Man sagt dazu, die Folge (a_n) *konvergiert* gegen den *Grenzwert* a , und schreibt $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$).

Aufgabe 23

Zu Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ definieren wir das *arithmetische, geometrische und harmonische Mittel*:

$$A(a_1, \dots, a_n) := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad G(a_1, \dots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}, \quad H(a_1, \dots, a_n) := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Geometrisches und harmonisches Mittel sind nur im Fall $a_1, \dots, a_n \geq 0$ erklärt; ist eine der Zahlen $a_1, \dots, a_n$ gleich Null, so setzen wir $H(a_1, \dots, a_n) := 0$.

- Berechnen Sie die drei Mittel, Minimum und Maximum der Zahlen $a = 1, b = 2, c = 3\sqrt{2}$.
- Zeigen Sie für die Zahlen aus a) die Ungleichungen

$$\min\{a, b, c\} \leq H(a, b, c) \leq G(a, b, c) \leq A(a, b, c) \leq \max\{a, b, c\}.$$

- Zeigen Sie allgemein für zwei Zahlen $a, b \geq 0$ die Ungleichungen

$$\min\{a, b\} \leq H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b) \leq \max\{a, b\}.$$

Was können Sie folgern, wenn eine dieser Ungleichungen eine Gleichung ist?

Bemerkung: Diese Ungleichungen gelten allgemeiner für die Mittelwerte von n Zahlen $a_1, \dots, a_n \geq 0$.

- Begründen Sie die folgenden Aussagen:

- Der Kehrwert des harmonischen Mittels ist das arithmetische Mittel der Kehrwerte.
- Der Logarithmus des geometrischen Mittels ist das arithmetische Mittel der Logarithmen.
- Alle drei Mittelwerte sind *homogen*, d.h. für $\lambda \geq 0$ gilt

$$M(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \lambda M(a_1, \dots, a_n).$$

¹Die Aussagen e) und f) sind gewichtete Versionen von Satz 3.5(3), setze $\varepsilon = 1$.

Aufgabe 24

Das *quadratische Mittel* und die *Standardabweichung* von $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$Q(a_1, \dots, a_n) := \frac{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}{\sqrt{n}}, \quad \sigma := \frac{\sqrt{(a_1 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}}{\sqrt{n}},$$

wobei $\bar{a} = A(a_1, \dots, a_n)$ das arithmetische Mittel bezeichnet.

- a) Berechnen Sie quadratisches Mittel und Standardabweichung der Zahlen $a = 1, b = 2, c = 3\sqrt{2}$ und verifizieren Sie die Gleichung $Q(a, b, c)^2 = \sigma^2 + \bar{a}^2$.
- b) Zeigen Sie für $a, b \geq 0$ allgemein, dass $A(a, b) \leq Q(a, b) \leq \max\{a, b\}$.
- c) Was können Sie über die Zahlen $a_1, \dots, a_n$ folgern, wenn $\sigma = 0$ ist?
- d) Zeigen Sie allgemein die Gleichung $Q(a_1, \dots, a_n)^2 = \sigma^2 + \bar{a}^2$.

Aufgabe 25

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $\lambda \geq 0$:

$-\max\{a, b\} = \min\{-a, -b\}$	$\max\{a, b, c\} = \max\{\max\{a, b\}, c\}$
$\max\{a, b\} + c = \max\{a + c, b + c\}$	$\max\{\lambda a, \lambda b\} = \lambda \max\{a, b\}$
$\max\{a, b\} \leq c \Leftrightarrow a \leq c \text{ und } b \leq c$	$\max\{a, b\} \geq c \Leftrightarrow a \geq c \text{ oder } b \geq c$

Formulieren Sie zu jeder Aussage analoge Aussagen für n Zahlen $a_1, \dots, a_n$ und für das Minimum.