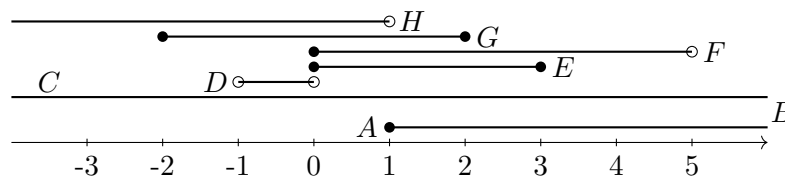


Aufgabe 13

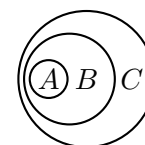
- (1) $A = [1, \infty)$, $B = \emptyset$, $C = \mathbb{R}$, $D = (-1, 0)$, $E = [0, 3]$, $F = [0, 5)$, $G = [-2, 2]$, $H = (-\infty, 1)$.
 Längen: $|B| = 0$, $|D| = 1$, $|E| = 3$, $|F| = 5$, $|G| = 4$.



- (2)

$[0, 2]$	$(2, \infty)$	\emptyset	\emptyset
\mathbb{R}	\emptyset	$(-1, 5)$	$(-1, 1)$

Aufgabe 14



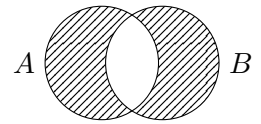
- a) Sei $x \in A$, aus $A \subseteq B$ folgt $x \in B$, aus $B \subseteq C$ folgt $x \in C$; also ist $A \subseteq C$. \square
 Das entspricht dem Aneinanderhängen von Implikationen, siehe die letzte Verständnisaufgabe auf Blatt 1.
- b) Sei $x \in B$, wegen $B \subseteq A \cup B = A \cup C$ ist dann $x \in A$ oder $x \in C$. Aus $x \in A$ folgt $x \in A \cap B = A \cap C$, also auch $x \in C$. Damit ist $B \subseteq C$; durch Vertauschen von B und C folgt auch $C \subseteq B$, also $B = C$. \square
- c) Es gilt $\{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\}$, aber $\{1\} \setminus \{1, 2\} = \emptyset$. Genauso ist $\{1, 2\} \setminus (\{1, 2\} \setminus \{1\}) = \{1\}$, aber $(\{1, 2\} \setminus \{1, 2\}) \setminus \{1\} = \emptyset$. \square
- d) „ \Rightarrow “: Sei $M \in \mathcal{P}(A)$, also $M \subseteq A$. Aus $A \subseteq B$ folgt dann $M \subseteq B$, also $M \in \mathcal{P}(B)$.
 „ \Leftarrow “: Es ist $A \in \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, also $A \subseteq B$. \square
- e) Die erste Aussage ist wahr: $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.¹
 Die zweite Aussage ist falsch, es gilt nur „ \supseteq “: Zum Beispiel ist $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\{1\} \cup \{2\})$, aber weder $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\{1\})$ noch $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\{2\})$.
 Die dritte Aussage ist wahr: $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \wedge ((x, y) \in C \times D) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in D \Leftrightarrow (x \in A \cap C) \wedge (y \in B \cap D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.
 Die vierte Aussage ist falsch, es gilt nur „ \subseteq “: Zum Beispiel liegt $(1, 1)$ in $(\{1\} \cup \{2\}) \times (\{2\} \cup \{1\})$, aber weder in $\{1\} \times \{2\}$ noch in $\{2\} \times \{1\}$. \square
- f) „ \Leftarrow “ ist klar. Für „ \Rightarrow “ sei $(a, b) = (c, d)$, also $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Wegen $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$ ist $\{a\} = \{c\}$ oder $\{a\} = \{c, d\}$, jedenfalls $c \in \{a\}$ und daher $a = c$. Genauso ist $\{a, b\}$ gleich $\{c\} = \{a\}$ oder gleich $\{c, d\} = \{a, d\}$, daraus folgt $b = a$ oder $b = d$. Auch im ersten Fall ist $\{a, b\} = \{a\}$ und daher $d \in \{a\} = \{b\}$; damit ist $b = d$ gezeigt. \square

Aufgabe 16

- a) „ \subseteq “: Ist $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \geq x \geq \frac{1}{n} > 0$, d.h. $x \in (0, 1]$.
 „ \supseteq “: Sei $0 < x \leq 1$. Dann ist $0 < 1 \leq \frac{1}{x}$ und nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{x} \leq n$. Das bedeutet $0 < x \leq \frac{1}{n}$, also $x \in [\frac{1}{n}, 1] \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$. \square
- b) Ist $k \in \{0, \dots, n\}$ und $N \subseteq M$ mit k Elementen, so ist natürlich $N \in \mathcal{P}(M)$; das zeigt „ \subseteq “. Wegen $n > 0$ gibt es aber auch noch Teilmengen mit einer anderen Anzahl an Elementen; das zeigt „ \subsetneq “. \square
- c) Es ist $\#\{N \subseteq M : \#N = k\} = \binom{n}{k}$, denn es gibt genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, $\#N = k$ aus $\#M = n$ Elementen auszuwählen. Genauso ist $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M} = 2^n$, denn jedes Element von M liegt entweder in einer Teilmenge $N \subseteq M$ oder nicht. Aus der echten Inklusion in b) folgt daher $\binom{n}{k} < 2^n$. \square
- d) Die Zahl $n! + 1$ hat nach der Primfaktorzerlegung mindestens einen Primteiler p (vielleicht ist sie selbst prim). Aber keine der Zahlen $2, 3, \dots, n$ ist ein Teiler von $n! + 1$, p liegt also nicht in $\{1, \dots, n\}$. (Tatsächlich gilt das für jeden Primteiler, d.h. $\{p \in \mathbb{P} : p|(n! + 1)\} \cap \{1, \dots, n\} = \emptyset$.) \square
- e) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach d) eine Primzahl $p > n$, nämlich einen Primteiler von $n! + 1$. Da \mathbb{N} unendlich ist, muss also auch \mathbb{P} unendlich sein. \square

¹Man vergleiche dies mit der letzten Verständnisaufgabe auf Blatt 1.

Aufgabe 17



- a) $A\Delta B$ entspricht „Entweder A oder B “.
b) Man berechnet mit De Morgan, den Distributivgesetzen für \wedge, \vee und der Tautologie $x \in A \vee x \notin A$

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \overline{x \in A \wedge x \in B} \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow x \in A\Delta B,\end{aligned}$$

das bedeutet $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Weiter ist $A\Delta A = \emptyset, A\Delta\emptyset = A$ und es gilt $A\Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A \setminus B = B \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$. \square

- c) Das Kommutativgesetz $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = B\Delta A$ ist klar. Für das Assoziativgesetz $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ überlegen wir uns: $x \in (A\Delta B)\Delta C$ ist äquivalent zu

$$(x \in A, x \notin B, x \notin C) \vee (x \notin A, x \in B, x \notin C) \vee (x \in A, x \in B, x \in C) \vee (x \notin A, x \notin B, x \in C).$$

Dieser Ausdruck ist aber symmetrisch in A, B, C , also äquivalent zu $x \in (B\Delta C)\Delta A$. \square

- d) Die ersten beiden Distributivgesetze sind wahr: Wie in c) ist $x \in (A \cap C)\Delta(B \cap C)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}&(x \in A \cap C, x \notin B \cap C) \vee (x \notin A \cap C, x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C, x \notin B) \vee (x \in A \cap C, x \notin C) \vee (x \notin A, x \in B \cap C) \vee (x \notin C, x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A, x \in C, x \notin B) \vee (x \notin A, x \in B, x \in C) \Leftrightarrow x \in (A\Delta B) \cap C,\end{aligned}$$

beachte die Kontradiktion $x \in C, x \notin C$. Genauso ist $x \in (A\Delta C) \cap (B\Delta C)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}&((x \in A, x \notin C) \vee (x \notin A, x \in C)) \wedge ((x \in B, x \notin C) \vee (x \notin B, x \in C)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A, x \notin C, x \in B) \vee (x \notin A, x \in C, x \notin B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B)\Delta C. \square\end{aligned}$$

Das dritte und vierte Gesetz sind falsch: Zum Beispiel für $A = C = \{1\}$ und $B = \emptyset$ ist

$$\begin{aligned}(A\Delta B) \cup C &= \{1\}, \text{ aber} & (A \cup C)\Delta(B \cup C) &= \emptyset. \\ (A \cup B)\Delta C &= \emptyset, \text{ aber} & (A\Delta C) \cup (B\Delta C) &= \{1\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 18

- a) $\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}$ ist der Ergebnisraum und $A = \{1, 2, \dots, 10\}, B = \{2, 4, \dots, 20\}$.
b) $A \cap B$: Es wird eine gerade Zahl kleiner-gleich 10 gewürfelt.
 $A \setminus B$: Es wird eine ungerade Zahl kleiner-gleich 10 gewürfelt.
 A^3 : Es wird dreimal hintereinander eine Zahl kleiner-gleich 10 gewürfelt. (Der Ergebnisraum ist Ω^3 .)
c) Wir zählen die Elemente in $A^3 \cup C$: $\#A^3 = (\#A)^3 = 10^3$. Hinzu kommen die Elemente in $C \setminus A^3$, bei denen entweder genau 1, 2 oder 3 Würfel größer als 10 sind: $\binom{3}{1} \cdot 4 \cdot 10^2 + \binom{3}{2} \cdot (3+2+1) \cdot 10 + \binom{3}{3} \cdot (3+1)$.
Damit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A^3 \cup C) = (10^3 + 12 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10 + 4) / 20^3 = \frac{149}{500} = 29,8\%.$$

Aufgabe 15

