

Übungsblatt 2

Verständnisaufgaben

- Sortieren Sie die folgenden Zahlen jeweils in die kleinstmögliche Zahlenmenge $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ein:

$$0 \quad \sqrt{121} \quad 17 \quad \frac{\pi}{2} \quad 4,333\dots \quad -\frac{8}{4} \quad \log 3 \quad -1,12345\dots$$

- Beschreiben Sie die folgenden Mengen verbal:

$$\begin{array}{llll} \{k^2 : k \in \mathbb{Z}\} & \{q \in \mathbb{Z} : 5|q\} & \{A : A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}\} & \{[a, b] : a, b \in \mathbb{Z}\} \\ \left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\} & \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\} & \{p \in \mathbb{P} : p + 2 \in \mathbb{P}\} & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \end{array}$$

- Beschreiben Sie die folgenden Mengen symbolisch:

- Die Menge der Zahlen, deren Quadrat rational ist.
- Die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$, also die Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$.
- Die Menge aller durch 2 oder durch 3 teilbaren Zahlen.
- Die Menge der Stammfunktionen von $f(x) = x^2 - 1$.
- Der achsenparallele Quader mit den Ecken $(-1, -1, 0)$ und $(2, 1, 1)$.
- Die Menge der ganzen Zahlen, die beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen.
- Die Menge aller Passwörter der Länge 8, wenn nur (kleine/ große) Buchstaben und Ziffern zugelassen sind. *Bonus:* Welche Kardinalität hat diese Menge?
- Die Menge der Mittelpunkte aller Kreise, die durch $(0, 1)$ und $(1, 0)$ verlaufen.

- Wechseln Sie jeweils zwischen einer aufzählenden Darstellung und einer Darstellung mit Aussageform. Welche Darstellung ist übersichtlicher?

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 8\} \quad \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\} \quad \{2m - 1 : m \in \mathbb{Z}, m \leq 3\} \quad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$$

- Welche der Relationen $\in, =, \subseteq, \subsetneq$ kann man jeweils für $\square$ einsetzen?

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2} \square \mathbb{Q} & \mathbb{N} \square \mathbb{N}_0 & [0, 1] \square \mathbb{Q} & \{x \in \mathbb{Z} : 3x^3 = x\} \square \mathbb{Z} \\ \{2, 4, 4\} \square \{4, 2\} & \emptyset \square \{\emptyset\} & -2 \square (-\infty, 2) & -18 \square \{t \in \mathbb{Z} : 6|t\} \\ \pi \square \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \mathbb{N} \square \mathcal{P}(\mathbb{Z}) & (-1, 1) \square [-1, \infty) & \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} \square \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

- Seien A, B Mengen und $a \in A$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, falls möglich:

$$\begin{array}{llll} A \cup \{a\} & A \times \emptyset & A \setminus A & A \cap (A \cup B) \\ A \cap \{a\} & A \times \{a\} & \{a\} \setminus \emptyset & A \cup (A \cap B) \\ [-1, 0) \cap [0, 1) & (-\infty, 4] \cup (4, \infty) & [6, 8] \setminus [6, 8) & \left((0, 2]^C \cup [2, \infty)\right)^C \end{array}$$

- Begründen Sie: Der Schnitt zweier Intervalle ist stets ein Intervall, die Vereinigung aber nicht immer.
- Begründen Sie, dass das folgende Objekt keine Menge sein kann:

$$\{x : \text{Es gibt kein } y, \text{ sodass } x \in y \text{ und } y \in x\}.$$

Aufgabe 11

a) Bestimmen Sie die Kardinalität der folgenden Mengen:

$$\begin{array}{lll} \{m \in \mathbb{N} : m \text{ ist ungerade und } m < 1000\} & \{t \in \mathbb{Z} : t|18\} & \{p \in \mathbb{P} : p \in [0, 50]\} \\ \{n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \in \mathbb{N} \text{ und } n < 10000\} & \{x \in \mathbb{R} : x^3 = x\} & \{x \in \mathbb{Q} : x^2 + 1 = 0\} \end{array}$$

b) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$ und ihre Kardinalität.

c) Es sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Bestimmen Sie aus den folgenden Informationen die Mengen A, B, C :
(Hinweis: Venn-Diagramm.)

$$\begin{array}{lll} A \cup B = M \setminus \{8\} & B \cup C = M \setminus \{4, 6\} & A \cup C = M \setminus \{3\} \\ A \cap B = \{7\} & B \cap C = \{1, 5, 7\} & A \cap C = \{2, 7\} \end{array}$$

Aufgabe 12

- a) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der Gleichung $2x^2 - x = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x$ über den Grundmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.
- b) Für welche $a, b \in \mathbb{Q}$ ist die Gleichung $ax + b = 0$ lösbar über $\mathbb{Q}$?
- c) Für welche $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Gleichung $ax + b = 0$ lösbar über $\mathbb{Z}$?
- d) Für welche $a, b \in \mathbb{N}$ ist die Gleichung $ax + b = 0$ lösbar über $\mathbb{N}$?

Aufgabe 13

(1) Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervall, stellen Sie sie auf der Zahlengeraden dar und bestimmen Sie die Länge der beschränkten Intervalle.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2} \geq \frac{1-x}{3}\}$ b) $B = \{x \geq 0 : 4(1-x) + 3(x+2) > 12\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 1 \leq 2(x+1) - (3-x)\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} : -2x(x-3)^2(x+1) > 0\}$
e) Die Menge E der Zahlen, die weder kleiner als 0 noch größer als 3 sind.
f) Die Menge F der nichtnegativen Zahlen (echt) zwischen -2 und 5 .
g) Die Menge G der Zahlen, deren Quadrat kleiner oder gleich 4 ist.
h) Die Menge H der Zahlen, die näher an -1 als an 3 liegen.

(2) Bestimmen Sie aus (1) die Mengen

$$\begin{array}{llll} F \cap G & A \setminus G & C \cap D \cap E & (B \setminus A) \cap F \\ A \cup H & \mathbb{R} \setminus C & D \cup E \cup F & (E \cap H) \cup D \end{array}$$

Aufgabe 14

Es seien A, B, C, D Mengen.

- a) Zeigen Sie: Die Inklusion $\subseteq$ ist *transitiv*, d.h. aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$. Zeichnen Sie dazu ein Venn-Diagramm. Welcher aussagenlogischen Regel entspricht das?
- b) Zeigen Sie: Aus $A \cup B = A \cup C$ und $A \cap B = A \cap C$ folgt $B = C$.
- c) Zeigen Sie mit zwei Gegenbeispielen, dass die Mengendifferenz im Allgemeinen weder kommutativ noch assoziativ ist, d.h. $A \setminus B \neq B \setminus A$ und $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.
- d) Beweisen Sie die Aussage $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
- e) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) & \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \\ (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) & (A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D) \end{array}$$

f) Man kann das geordnete Paar (a, b) mithilfe (ungeordneter) Mengen als *Kuratowski-Paar* $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ definieren. Zeigen Sie: Mit dieser Definition gilt $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ und $b = d$.

Aufgabe 15

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{lll} ((-1, 1) \setminus \{0\}) \times [-1, \infty) & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 1\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq x\} \\ ((0, 1] \cup \{3\}) \times \{1, 2\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin [1, \infty)\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y \leq x \leq y\} \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ und } x = 2\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 9\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \leq y - 1 \leq x\} \end{array}$$

Aufgabe 16

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- Für die Menge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1] = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x \in [\frac{1}{n}, 1]\}$ gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit $\#M = n$, insbesondere $M \neq \emptyset$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$: $\{N \subseteq M : \#N = k\} \subsetneq \mathcal{P}(M)$.
- Aus b) folgt, dass $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} < 2^n$ für alle $0 \leq k \leq n$.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\{p \in \mathbb{P} : p | (n! + 1)\} \not\subseteq \{1, \dots, n\}$.
- Aus d) folgt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 17

Wir definieren die **symmetrische Differenz** zweier Mengen A, B durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm der Menge $A \Delta B$. Welcher logischen Verknüpfung entspricht Δ ?
- Begründen Sie die Darstellung $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, berechnen Sie $A \Delta A$ sowie $A \Delta \emptyset$ und zeigen Sie die Aussage $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
- Beweisen Sie Kommutativ- und Assoziativgesetz für Δ .
- Beweisen oder widerlegen Sie die Distributivgesetze

$$\begin{array}{ll} (A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C) & (A \cap B) \Delta C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C) \\ (A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \cup C) & (A \cup B) \Delta C = (A \Delta C) \cup (B \Delta C) \end{array}$$

Aufgabe 18

Es wird mit einem zwanzigseitigen Würfel (W20) gewürfelt.

- Beschreiben Sie symbolisch den Ergebnisraum und die Ereignisse

A : „Es eine Zahl kleiner-gleich 10 gewürfelt.“

B : „Es wird eine gerade Zahl gewürfelt.“

- Interpretieren Sie die Ereignisse $A \cap B$, $A \setminus B$ und $A^3 = A \times A \times A$.
- Beim dreifachen Wurf mit dem W20 betrachten wir das Ereignis

C : „Die Summe der Abweichungen von 10 beträgt höchstens 4.“

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A^3 \cup C$.