

Übungsblatt 1

Verständnisaufgaben

- Welche der folgenden Sätze sind Aussagen? Welche der Aussagen sind wahr?
 - a) Trauben schmecken süß.
 - b) Es gibt eine Zahl, die genau drei Teiler hat.
 - c) 1001 ist eine Primzahl.
 - d) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
 - e) Durch je zwei Punkte in der Ebene verläuft eine Gerade.
 - f) In jedem n -Eck beträgt die Summe der Innenwinkel $(n - 1) \cdot 180^\circ$.
 - g) Alle quadratischen Gleichungen haben zwei Lösungen.
 - h) Zu jedem Kreis lässt sich nur mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat konstruieren.
- Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Gleichung, die a) keine Lösung, b) genau eine Lösung, c) jede reelle Zahl als Lösung hat. Formulieren Sie diese Aussagen mithilfe von Quantoren.
- Wir betrachten die Aussageform $A(x, y)$: „Person x hat Aufgabe y eigenständig gelöst.“ Formulieren Sie die folgenden Aussagen in natürlicher Sprache:

$$\forall x \forall y : A(x, y)$$

$$\forall x \exists y : A(x, y)$$

$$\exists x \forall y : A(x, y)$$

$$\exists x \exists y : A(x, y)$$

$$\exists y \forall x : A(x, y)$$

$$\forall y \exists x : A(x, y)$$

- Erzeugen Sie durch logische Verknüpfung der folgenden Aussagen einige wahre Aussagen:

Heute ist Montag.

Heute ist kein Werktag.

Gestern war Dienstag.

Heute ist Wochenende.

Morgen ist nicht Sonntag.

Vorgestern war Freitag.

- Formulieren Sie Negation, Umkehrung und Kontraposition der folgenden Implikationen:

Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.

x ist ungerade $\Rightarrow x^2$ ist ungerade.

- Sei $x \in \mathbb{R}$ und die Aussage $A : „x^2 \geq 9“$ gegeben. Geben Sie jeweils eine Aussage an, die a) hinreichend, aber nicht notwendig, b) notwendig, aber nicht hinreichend, c) hinreichend und notwendig für A ist.
- Beweisen Sie die folgenden Implikationen für $x, y \in \mathbb{N}_0$. Gilt auch die Umkehrung?

$$2|x \text{ und } 2|y \Rightarrow 4|xy$$

$$\exists k, l \in \mathbb{Z} : kx + ly = 1 \Rightarrow x \text{ und } y \text{ sind teilerfremd}^1$$

- Welche Argumentationsprinzipien erkennen Sie hier?

$$A \Rightarrow (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$$

$$(A \vee B) \Rightarrow C \Leftrightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$$

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \Rightarrow C$$

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \text{ ist eine Tautologie.}$$

¹Das bedeutet, dass 1 der größte gemeinsame Teiler von x und y ist.

Aufgabe 4

- (1) Vereinfachen Sie die folgenden logischen Verknüpfungen:

$$((A \Rightarrow B) \vee B) \Rightarrow (A \wedge B) \quad (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow (A \wedge B)) \quad (A \vee B) \Rightarrow ((\bar{A} \vee B) \wedge (A \Rightarrow \bar{A}))$$

- (2) Stellen Sie die Aussage „Entweder A oder B “ und ihre Negation a) in einer Wahrheitstafel, b) nur mithilfe der logischen Verknüpfungen $\neg, \wedge, \vee$ dar. Gibt es mehrere Möglichkeiten?
- (3) Stellen Sie die Aussagen X, Y, Z in folgender Wahrheitstafel durch logische Verknüpfung von A, B dar:

A	B	X	Y	Z
w	w	w	f	f
w	f	w	w	w
f	w	f	w	f
f	f	w	w	f

Aufgabe 5

Schreiben Sie die folgenden Aussagen mithilfe von Quantoren und logischen Verknüpfungen. Bilden Sie anschließend die Negation und formulieren Sie sie in natürlicher Sprache.

- Zu jeder Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl.
- Wenn das Barometer fällt, wird es regnen oder schneien.
- Ohne Fleiß kein Preis.
- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x < y$ oder $x > y$.
- Manche Vierecke sind achsen- und punktsymmetrisch.
- Krebs wird nicht heilbar sein, ehe nicht die Ursache gefunden und ein Medikament entwickelt wird.
- f hat notwendig einen Hochpunkt bei x_0 , wenn $f''(x_0) < 0$ gilt.
- Zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl.
- Das Polynom $x^2 + a$ hat genau dann keine Nullstelle, wenn a positiv ist.
- Es gibt drei Geraden, die paarweise senkrecht aufeinander stehen.
- In jeder Spalte, jeder Zeile und jedem Kästchen muss jede der Zahlen 1 bis 9 vorkommen.
- Ist $n > 2$ eine natürliche Zahl, so gibt es keine ganzzahlige Lösung a, b, c der Gleichung $a^n + b^n = c^n$.

Aufgabe 6

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sind die folgenden Implikationen allgemeingültig? Geben Sie ggf. einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

- $a^2 \neq b^2 \Rightarrow a \neq b$.
- $(a - b)^2 + 2ab > a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 > 12ab$.
- $ab \geq cd \Rightarrow \frac{a}{d} \geq \frac{c}{b}$.
- $a, b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \notin \mathbb{Q}$ oder $ab \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 7

Erinnerung: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die genau zwei (natürliche) Teiler hat; $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ bezeichnet die Menge aller Primzahlen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:²

- Es gibt mehr als eine gerade Primzahl.
- Die Summe zweier gerader Primzahlen ist stets eine Quadratzahl.
- Es gibt genau eine Primzahl p , sodass auch $p + 2$ und $p + 4$ Primzahlen sind. (*Primzahlrilling*)
- Ist p eine Primzahl, so ist $\sqrt{p}$ irrational.
- Es gibt eine größte Primzahl.

²Verwenden Sie bei Bedarf die *Primfaktorzerlegung*: Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben.

Aufgabe 8

Schreiben Sie die folgenden Aussagen mithilfe von Quantoren und logischen Verknüpfungen. Welche Aussagen sind wahr?

- a) $\sqrt{1000}$ oder $(-\frac{1}{2})^{-2}$ ist eine natürliche Zahl.
- b) Die Gleichung $e^x + x = 0$ ist lösbar.
- c) Es gibt keine größte ganze Zahl.
- d) Ist $z \in \mathbb{Z}$ nicht durch 42 teilbar, so ist z auch nicht durch 2, nicht durch 3 oder nicht durch 7 teilbar.
- e) 1 ist das Quadrat von genau einer rationalen Zahl.
- f) Nicht alle Rauten sind Parallelogramme.
- g) Gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 < 0$, so ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösbar.
- h) Es gibt eine Zahl, die von jeder Zahl geteilt wird, aber nur sich selbst teilt.
- i) Eine natürliche Zahl ist durch 3 teilbar dann und nur dann, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- j) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $m^2 = n - 5$ nur dann eine Lösung $m \in \mathbb{N}$, wenn $n \geq 5$ ist.
- k) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $m^2 = n - 5$ dann eine Lösung $m \in \mathbb{N}$, wenn $n \geq 5$ ist.
- l) Die Gleichung $m^2 = n - 5$ hat genau dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung $m \in \mathbb{N}$, wenn sie für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Lösung $n \in \mathbb{N}$ hat.

Aufgabe 9

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Eine Funktion ist genau dann quadratisch, wenn ihre Ableitung linear ist.
- b) Jede ungerade Zahl lässt sich als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.
- c) Sind x_1, x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 x_2 = q$. (*Satz von Vieta*)
- d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $2n^2 + n + 1$ nicht durch 3 teilbar. *Hinweis:* Fallunterscheidung.
- e) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ist irrational.
- f) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Werden $nm + 1$ Objekte auf m Schubfächer verteilt, so liegen in mindestens einem Schubfach mindestens $n + 1$ Objekte. (*Schubfachprinzip*)
- g) Für alle $x, y \geq 0$ gilt $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$.
- h) Gilt nicht $x, y \geq 0$, so ist $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$ im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 10

Der alte, weise Zauberer besitzt drei schwarze und zwei weiße Hüte, wie seine drei Zauberlehrlinge wissen. Eines Tages ruft er seine Lehrlinge herbei und stellt sie so in einer Reihe auf, dass jeder nur seine Mitschüler vor sich sehen kann. Dann setzt er ihnen von hinten jeweils einen seiner Hüte auf und fragt:

- „Wer kennt die Farbe des Hutes, den er trägt?“ Keine Antwort.
- „Wer kennt die Farbe des Hutes, den er trägt?“ Wieder keine Antwort.
- „Wer kennt die Farbe des Hutes, den er trägt?“

Jetzt antwortet einer der Lehrlinge. Welcher ist es und was antwortet er?