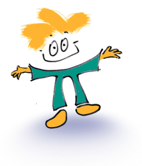
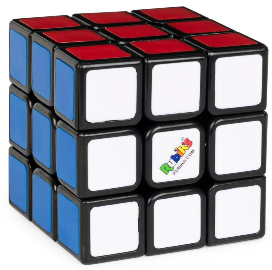
Karlsruher Institut für Technologie

Zauberkörper





Der Zauberwürfel - oder auch Rubik's Cube - ist ein Drehpuzzle. Er besteht aus 26 Steinen, jede der sechs Würfelseiten hat eine eigene Farbe. Die einzelnen Steine können entlang verschiedener Achsen gedreht werden, wodurch sich die Farben der einzelnen Seiten vermischen. Ziel ist es, den Würfel so zu drehen, dass pro Seite nur eine Farbe zu sehen ist.
Es wird zwischen drei Stein-Arten unterschieden:

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Zauberw%C3%BCrfel (Stand: 01.07.22)

- Mittelstein: Die sechs Steine in der Mitte der Würfelflächen sitzen auf dem Achsenkreuz im Inneren des Würfels und daher zueinander konstruktionsbedingt immer in derselben relativen Lage. Die Farbe des Mittelsteines bestimmt, welche anderen Steine auf diese Seite gehören und welche Orientierung sie haben müssen. Mittelsteine sind einfarbig.
- Kantenstein: Die zwölf Kantensteine verbinden je zwei angrenzende Flächen und werden von den Mittelsteinen der beiden Flächen gehalten. Kantensteine haben zwei Farben.
- Eckstein: Die acht Ecksteine verbinden je drei angrenzende Flächen in den Ecken. Sie werden von den drei benachbarten Kantensteinen in Position gehalten und haben jeweils drei Farben.

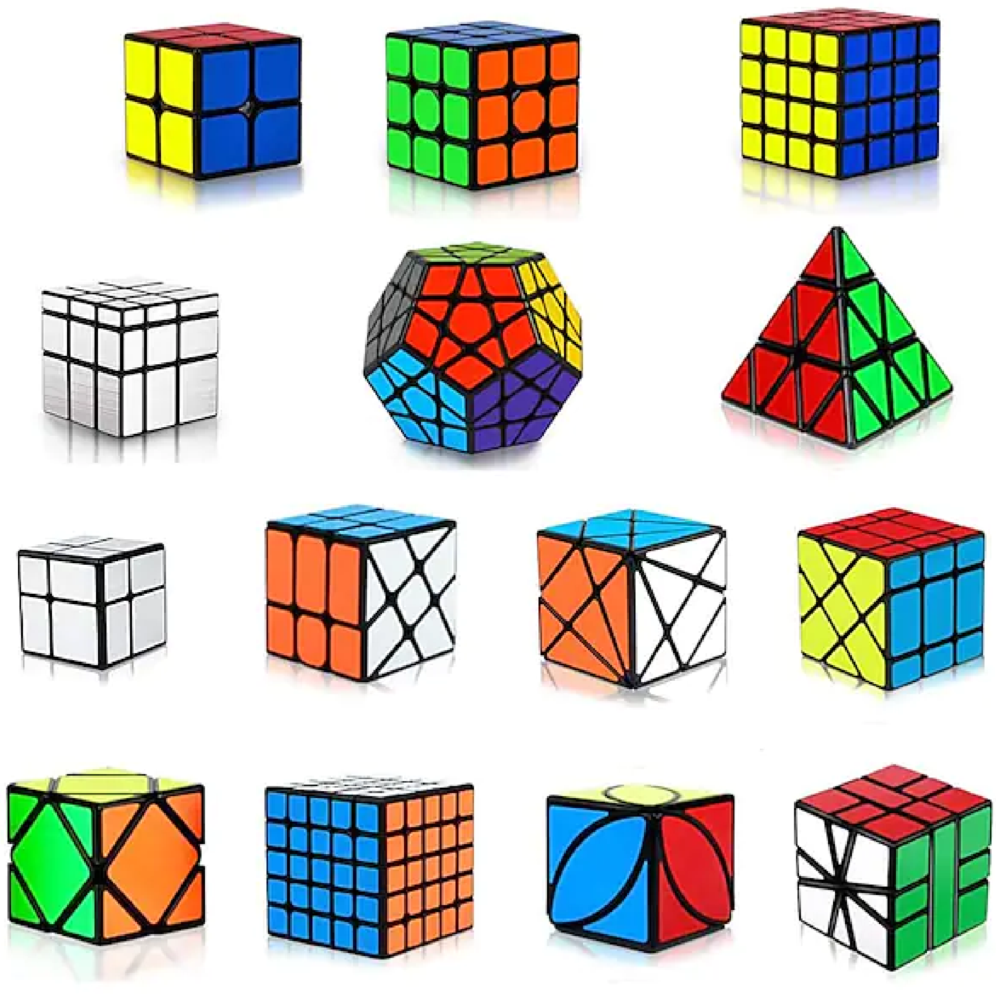
Quelle: https://media.spinmasterstudios.com/images/products/rubiks/us/778988419533/full1.jpg und https://media.spinmasterstudios.com/images/products/rubiks/us/778988419533/full6.jpg (Stand: 01.07.22)

Der Rubik's Cube wurde 1974 von Ernõ Rubik, einem ungarischen Architekturprofessor, erfunden. Rubik schuf den Würfel als eine Lernübung, um seinen Studenten etwas über dreidimensionale Räume beizubringen. Er ahnte nicht, dass sein „Zauberwürfel" (wie er ihn ursprünglich nannte) zu einem der berühmtesten Puzzles aller Zeiten werden würde! In den 1980er Jahren war der Rubik's Cube ein weltweiter Renner, von dem jedes Jahr Millionen von Würfeln verkauft wurden und der sein Vermächtnis in der Popkultur verankerte. Der Rubik's Cube wurde in den Simpsons, in The Big Bang Theory, in einem Musikvideo der Spice Girls und in großen Hollywood-Filmen gezeigt und erfreute sich weltweit immer größerer Beliebtheit. Heute wird der Zauberwürfel als eines der beliebtesten Spielzeuge aller Zeiten verehrt. Jedes Jahr werden Millionen von Würfeln verkauft, gelöst und mit Freunden, Familien und Rätselfreunden geteilt. Quelle:https://rubiks.com/ (Stand: 01.07.22)

Wettbewerbe und Rekorde
Rund um den Rubiks Cube hat sich die Speedcubing Community gebildet. Rund um die Welt gibt es Wettbewerbe, bei denen Menschen versuchen den Zauberwürfel so schnell wie es geht zu lösen. Speziell dafür wurde die World Cube Association (WCA) gegründet, die alle Wettkämpfe organisiert und kontrolliert.

Der derzeitige Weltrekord wurde 2018 von Yusheng Du aufgestellt und beträgt 3,47 Sekunden.
Das Video von diesem Rekord findest du unter: https://www.youtube.com/watch?v=_WawN0tpmKI (Stand: 05.07.22).

Variationen
Es gibt eine Menge verschiedener Varianten von Zauberwürfeln bzw. Zauberkörpern. Aufgrund ihrer verschiedenen Formen haben sie auch unterschiedliche Drehachsen.



`https://litb-cgis.rightinthebox.com/images/640x640/202010/xarqae1602341137567.jpg` (Stand: 01.07.22)

Lösungsalgorithmen (Anleitung):
Es finden sich online zahlreiche Anleitungen, wie man verschiedene Zauberkörper löst. Es finden sich auf YouTube auch Erklärungen als Video.

Normaler Rubiks Cube:
`https://cubesolve.com/wie-man-einen-zauberwurfel-rubiks-cube-lost-de/`

Pyraminx:
`http://www.randelshofer.ch/rubik/virtual_cubes/pyraminx/instructions/pdf/Pyraminx_Solution_DE.pdf`

Der Würfel als mathematische Gruppe

Der Zauberwürfel kann als mathematische Gruppe aufgefasst werden.

Was ist eine Gruppe?

In der Mathematik ist eine Gruppe eine Menge (M) von Elementen zusammen mit einer Verknüpfung $(*)$. Dabei ist es wichtig, dass die Verknüpfung, je zwei Elementen der Menge ein drittes Element derselben Menge zuordnet (Abgeschlossenheit). Außerdem müssen drei Bedingungen, die Gruppenaxiome, erfüllt sein:

- Das Assoziativgesetz muss gelten, das heißt, dass die die Reihenfolge der Ausführung mehrerer Verknüpfung keine Rolle spielt.
  $(a * b) * c = a * (b * c), \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}.$
- Es muss in der Menge ein neutrales Element (e) geben. Bei der Verknüpfung eines Elements der Menge mit dem neutralen Element kommt immer wieder das ursprüngliche Element selbst raus:
  $a * e = e * a = a, \qquad a, e \in \mathbb{Z}.$
- Es muss zu jedem Element der Menge (a) ein inverses Element (b) in der Menge existieren. Wird ein beliebiges Element der Menge mit seinem Inverses verknüpft, erhält man immer das neutrale Element als Ergebnis:
  $a * b = b * a = e, \qquad a, b, e \in \mathbb{Z}.$
  Häufig wird statt b auch a^{-1} notiert: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e, \qquad a, a^{-1}, e \in \mathbb{Z}$

Man schreibt dann: $(M, *)$ ist eine Gruppe.

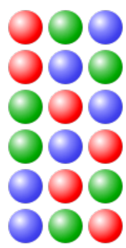
Wenn die Reihenfolge beim verknüpfen egal ist, also $a*b = b*a, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}$, nennt man eine Gruppe abelsch.

Beispiel: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe.

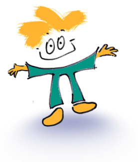
- Die Menge $\mathbb{Z}$ sind die ganzen Zahlen: $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Die Verknüpfung ist $+$, also die bekannte Addition.
- Die Menge ist abgeschlossen unter Addition: addiert man zwei ganze Zahlen, erhält man wieder eine ganze Zahl.
- Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$ gilt - es ist egal, ob man zuerst a und b oder b und c addiert, das Ergebnis ist das gleiche.
- neutrales Element: $e = 0$. Egal zu welcher ganzen Zahl man null addiert, bleibt immer diese ganze Zahl.
- inverse Elemente: $a + b = b + a = 0$ gilt. Zu jeder ganzen Zahl a existiert eine ganze Zahl b, so dass ihre Summe null ergibt. Bei den ganzen Zahlen mit der Addition ist das Inverse zu einer Zahl a die ganze Zahl $-a$.
  z.B.: $a = 2$, dann ist das inverse Element $-a = -2$, denn $2 + (-2) = 0$.
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist abelsch, es macht keinen Unterschied ob man $a + b$ oder $b + a$ bestimmt.

Was ist eine Permutation?

Unter einer Permutation (von lateinisch permutare ‚vertauschen‘) versteht man in der Kombinatorik eine Anordnung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge.
Beispiel: Wir haben drei Kugeln, die Menge ist somit gegeben durch $M = \{K_{\text{rot}}, K_{\text{grün}}, K_{\text{blau}}\}$.
Rechts sieht man alle Permutationen dieser Menge: Es gibt sechs verschiedene Anordnungen dieser drei verschieden farbiger Kugeln.
Das Hintereinanderausführen von Permutationen auf der Menge kann als Verknüpfung einer Gruppe verstanden werden.



`https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Permutations_RGB.svg` (Stand: 01.07.22)



Die Mathematik des Zauberwürfels

Jede einzelne mögliche Stellung des Würfels kann als Element einer Menge aufgefasst werden. Es gibt sechs Basis-Permutationen: $B = \{V, H, R, L, O, U\}$. Diese bezeichnen eine Drehung einer Schicht des Würfel im Uhrzeigersinn. V bezeichnet eine Drehung der vorderen Schicht des Würfels, H hinten, R rechts, L links, O oben und U unten. Alle dieser Drehungen können auch gegen den Uhrzeigersinn durchgeführt werden.

Die einzelnen Stellungen des Würfels (Elemente der Menge) werden erreicht, indem verschiedene dieser Permutationen verknüpft werden, also nacheinander ausgeführt werden.

Neutrales Element: Die Grundstellung i, also die „Nulloperation“ ausgeführt auf dem gelösten Würfel, denn für alle möglichen Gruppenelemente p gilt $p \circ i = i \circ p = p$.

Inverses Element: Zu jedem Element p gibt es ein Element p^{-1} mit $p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = i$. Betrachtet man z.B. den Würfel, bei dem von der gelösten Position aus nur einmal rechts im Uhrzeigersinn gedreht wurde, kann man rechts einfach einmal gegen den Uhrzeigersinn drehen und landet wieder bei der Grundstellung i. Dies geht mit jeder einzelnen Position des Würfels.

Die Gruppe ist nicht kommutativ. Zum Beispiel gilt $R \circ H \neq H \circ R$ (Drehung rechts im Uhrzeigersinn und danach hinten im Uhrzeigersinn führt nicht zur selben Würfelstellung wie zuerst hinten im Uhrzeigersinn drehen und danach rechts im Uhrzeigersinn).

Den Würfel zu lösen kann also so beschrieben werden, dass eine beliebige Permutation vorliegt (verdrehter Würfel) und eine Kombination von mehreren Permutationen gefunden werden muss, die, wenn sie nacheinander ausgeführt werden, zur Grundstellung i führen. Beim Speedcubing geht es darum, eine minimale Kombination zu finden (so wenige einzelne Drehungen wie möglich).

Wie viele verschiedene Stellungen des Würfels gibt es?
Die Anzahl an Würfelstellungen entspricht mathematisch der Ordnung der Gruppe. Diese ergibt sich folgendermaßen:

$$|G| = \frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 43.252.003.274.489.856.000 \approx 4{,}3 \cdot 10^{19}$$

Erklärung Zähler:

- 8 Positionen, an denen sich die Eckwürfel befinden können. Dabei kann der erste alle 8 Positionen einnehmen, der zweite noch 7 und so weiter, wodurch die Zahl der Kombinationen der Fakultät von 8 entspricht (8!).
- 3 Orientierungen, die jeder Eckwürfel einnehmen kann (3^8).
- 12 Positionen, an denen sich die Kantenwürfel befinden können (12!).
- 2 Orientierungen, die jede Kante einnehmen kann (2^{12}).

Erklärung Nenner:

- Sieben der acht Eckwürfel lassen sich nach Belieben orientieren, während die Orientierung des achten dadurch erzwungen wird (3).
- Elf der zwölf Kantenwürfel lassen sich nach Belieben orientieren, während die Orientierung des zwölften dadurch erzwungen wird (2).
- Es lassen sich weder allein zwei Eckwürfel vertauschen, noch lassen sich allein zwei Kanten vertauschen. Die Anzahl der paarweisen Vertauschungen muss immer gerade sein (2).

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Zauberw%C3%BCrfel#Mathematik (Stand: 21.07.22)