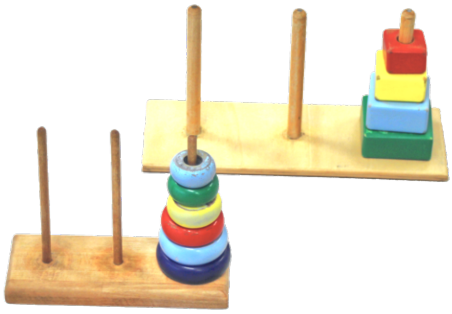
Karlsruher Institut für Technologie

Türme von Hanoi



Der Turm von Hanoi ist ein klassisches Knobelspiel. Es besteht aus drei Pfosten, wobei auf einem davon verschieden große Holzscheiben zu einem Turm gestapelt sind. Das Ziel ist es, diesen Turm in so wenigen Zügen wie möglich auf einem der anderen Pfosten aufzubauen. Dabei gelten folgende Regeln:

1. Es darf immer nur eine Scheibe bewegt werden.
2. Es dürfen nur kleinere Scheiben auf größeren liegen.

Das Rätsel wurde 1883 vom französische Mathematiker Édouard Lucas erfunden. Es wurde als Spielzeug verkauft und Lucas erfand eine Geschichte dazu:

Im Großen Tempel von Benares, unter dem Dom, der die Mitte der Welt markiert, ruht eine Messingplatte, in der drei Diamantnadeln befestigt sind, jede eine Elle hoch und so stark wie der Körper einer Biene. Bei der Erschaffung der Welt hat Gott vierundsechzig Scheiben aus purem Gold auf eine der Nadeln gesteckt, wobei die größte Scheibe auf der Messingplatte ruht, und die übrigen, immer kleiner werdend, eine auf der anderen. Das ist der Turm von Brahma. Tag und Nacht sind die Priester unablässig damit beschäftigt, den festgeschriebenen und unveränderlichen Gesetzen von Brahma folgend, die Scheiben von einer Diamantnadel auf eine andere zu setzen, wobei der oberste Priester nur jeweils eine Scheibe auf einmal umsetzen darf, und zwar so, dass sich nie eine kleinere Scheibe unter einer größeren befindet. Sobald dereinst alle vierundsechzig Scheiben von der Nadel, auf die Gott sie bei der Erschaffung der Welt gesetzt hat, auf eine der anderen Nadeln gebracht sein werden, werden der Turm samt dem Tempel und allen Brahmanen zu Staub zerfallen, und die Welt wird mit einem Donnerschlag untergehen.

Quelle: Beutelspacher, A. (2015). Wie man in eine Seifenblase schlüpft: Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten. Experiment 97: Der Turm von Ionah. München: Beck.

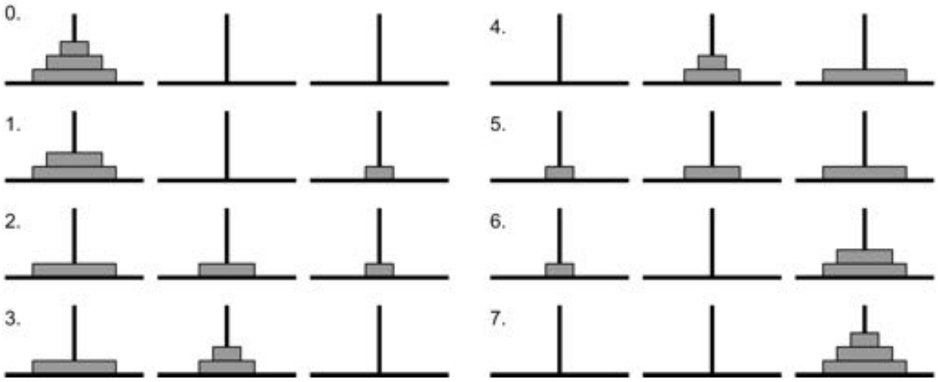
Die Form der Türme erinnert an Pagoden - turmartige Gebäude, die häufig in Vietnam, China, Nepal, Myanmar, Kambodscha, Japan und Korea zu finden sind. Eine bekannte Pagode, die Tran-Quoc-Pagode im linken Bild, steht in Hanoi, Vietnam - was den Namen des Rätsels erklärt. Das Bild rechts zeigt Pagoden in Inwa, der alten Hauptstadt des früheren Königreiches Ava in Myanmar.

Quelle: https://vietnam.de/wp-content/uploads/sites/4/2017/02/VIE_2015_1HGN_IMG_2681-660x330.jpg (Stand: 12.08.21)
und https://wedesigntrips.com/fileadmin/_processed_/b/1/Myanmar-Ava-Inwa-Pagodas-e70ca10ade.jpg (Stand: 12.08.21)

Türme von Hanoi

Um das Rätsel zu lösen gibt es verschiedene Strategien.

Die einfachste Art des Turms von Hanoi sind drei Scheiben. Um diesen Turm zu versetzen werden mindestens 7 Schritte benötigt. Für einen Turm aus vier Scheiben werden 15 Schritte benötigt, den aus fünf Scheiben 31 und den aus sechs Scheiben 63.



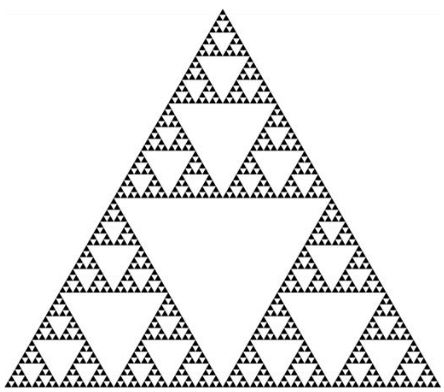
Quelle: https://www.includehelp.com/data-structure-tutorial/images/tower-of-hanoi-2.png (Stand: 12.08.21)

Das kann man in der Theorie ausweiten und einen Algorithmus für n Scheiben entwickeln. Es wurde herausgefunden, dass man zum Versetzen eines Turms mit n-Scheiben mind. $2^n - 1$ Schritte benötigt.

Kommen wir zurück zur Geschichte von Lucas:
Er erzählt von 64 Scheiben. Mit dem Algorithmus ergibt sich, dass dafür mind. $2^{64} - 1 = 1.8 \cdot 10^{19}$ Züge benötigt werden.
Geht man davon aus, dass in jeder Sekunde eine Scheibe umgelegt (was bei schweren Goldscheiben eher unrealistisch ist), so dauert das 585-Milliarden Jahre. Vergleich: Derzeit wird das Alter der Erde auf etwa $4,4$-Milliarden Jahre geschätzt.

Die Türme von Hanoi spielen: Man kann das Rätsel auch online spielen unter `https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html` (Stand: 12.08.21).

Für Interessierte: Wenn dich das Thema interessiert, dann schau dir gerne auch unser Dokument zu Algorithmen unter *„Zeig mir noch mehr“* an. Außerdem: Die Türme von Hanoi haben auch etwas mit Mesenne-Zahlen und dem Sierpinski-Dreieck zu tun. Recherchiere was es damit auf sich hat!


Quelle: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/ad/Sierpinski-Trigon-7.svg/1024px-Sierpinski-Trigon-7.svg.png (Stand: 12.08.21)