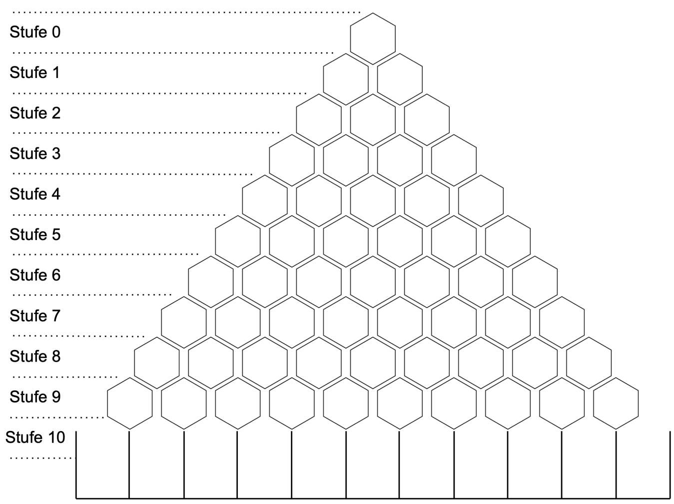
Karlsruher Institut für Technologie

Galton-Brett

Am Ende des 19. Jahrhunderts entwickelte der englische Universalgelehrte Sir Francis C. Galton (1822–1911) eine Anordnung zur Demonstration der sog. Binomialverteilung. Diese Anordnung bezeichnete man später ihm zu Ehren als Galton–Brett.

Das Galton-Brett ist eine dreieckige Anordnung, in die man oben kleine Kugeln hineinwerfen kann, die unten in einem von mehreren Fächern landen. Auf dem Weg zu einem Fach trifft eine Kugel auf mehrere Hindernisse. An jedem Hindernis beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel nach links oder rechts fällt je $p = 0.5$. Werden sehr viele Kugeln in das Galtonbrett geworfen, so zeichnet sich in den Fächern unten ein Bild ab: Außen sind nur wenige einzelne Kugel und je weiter ein Fach in der Mitte liegt, desto mehr Kugeln befinden sich darin. Die Form dieser Verteilung ist eine glockenförmige Kurve, die „Gauß'sche Glockenkurve“.

Wie lässt sich das mathematisch erklären?
Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu verstehen, müssen die Wege in die jeweiligen Fächer genauer betrachtet werden. Dafür kann die schematische Darstellung des Galton-Bretts helfen.



- Um in Stufe 1 zu gelangen, gibt es insgesamt zwei Wege:
  - Man ist in Stufe 0 rechts gegangen.
  - Man ist in Stufe 0 links gegangen.
- Um in Stufe 2 zu gelangen, gibt es schon vier Wege:
  - Man ist in Stufe 0 rechts gegangen, in Stufe 1 auch rechts.
  - Man ist in Stufe 0 rechts gegangen, in Stufe 1 nach links.
  - Man ist in Stufe 0 links gegangen, in Stufe 1 auch links.
  - Man ist in Stufe 0 rechts gegangen, in Stufe 1 nach rechts.

Je weiter man sich nach unten bewegt, desto mehr verschiedene Wege gibt es somit!

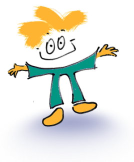
Die Anzahl an möglichen Wegen pro Stufe ergibt sich durch die Rechnung 2^i, wobei i die jeweilige Stufe ist. Diese Formel ist auch sehr einfach zu erklären: Pro Stufe gibt es für eine Kugel zwei Möglichkeiten: rechts oder links. Diese „Entscheidung“ wird in jeder Stufe i getroffen.

Beispiel: Anzahl der Wege in Stufe 2: $2^2 = 4$.

Das Galton-Brett im Schülerlabor hat elf Fächer, somit befinden wir uns in Stufe 10 im Schema.
Offenbar gibt es $\mathbf{2^{10} = 1024}$ verschiedene Wege in die unterste Stufe.

Karlsruher Institut für Technologie

Galton-Brett

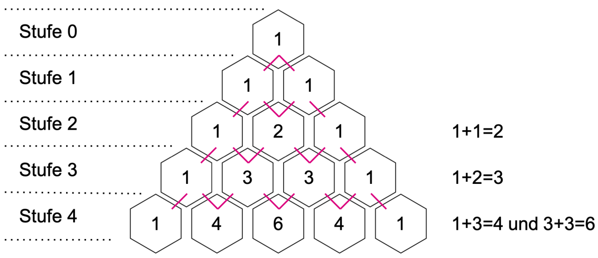


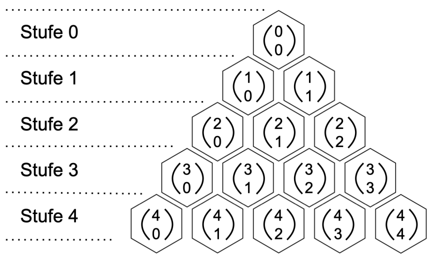
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in ein bestimmtes Fach fällt ergibt sich klassisch nach Laplace durch:

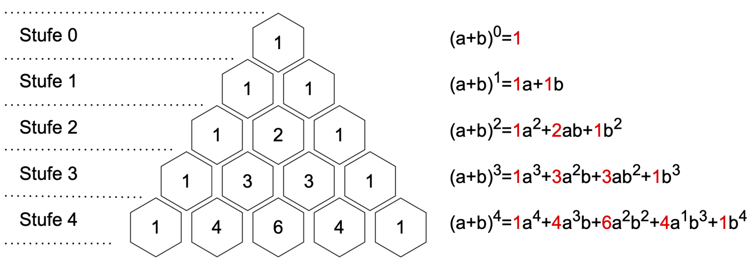
$$P = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}}$$

Um nun die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Fächer bestimmen zu können, muss nun also noch überlegt werden, wie viele der Wege je in ein bestimmtes Fach führen.

Dafür betrachten wir das Pascalsche Dreieck. In den oberen drei Einträgen steht je eine 1 (Vgl. Galton-Brett: Es gibt in Stufe null nur eine Möglichkeit und in Stufe 1 je eine Möglichkeit). Des weiteren ist jeder Eintrag die Summe der zwei darüberstehenden Einträge: Ganz außen stehen nur Einsen und alle Felder im Inneren können schrittweise berechnet werden. Für größere Dimensionen wird das schnell sehr aufwendig. Es gibt auch eine direkte Rechenvorschrift, den Binomialkoeffizienten: In jede Zelle führen $\binom{n}{k}$ Wege - dabei ist n die Stufe im Pascalschen Dreieck und k wird von links nach rechts ganzzahlig durchgezählt, beginnend bei 0. Die Zahlen, die in jeder Stufe stehen entsprechen auch den Koeffizenten der binomischen Formeln: $(a+b)^n$.







Für die Fächer im Galton-Brett gibt es somit folgende Anzahl an Wegen pro Fach:

1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(\text{außen}) = \frac{1}{1024} \approx 0,00098, \qquad P(\text{Mitte}) = \frac{252}{1024} = 0,24609375$$

Karlsruher Institut für Technologie

Galton-Brett

Andere Überlegung:
Da es sich um eine Binomialverteilung handelt, können die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Fächer auch mit Hilfe der Bernoulli-Formel bestimmt werden!

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^n\cdot(1-p)^{(n-k)}$$

Dafür wird „rechts abbiegen“ als „Treffer“ und „links abbiegen“ als „Nicht-Treffer“ festgelegt.

- $\mathbf{k=0}$ bedeutet „nie nach rechts abbiegen“ oder somit auch „immer nach links abbiegen“ und damit landet man im Fach ganz links außen.
- $\mathbf{k=1}$ bedeutet „einmal nach rechts abbiegen“ oder somit auch „neunmal nach links abbiegen“ und damit landet man im zweiten Fach von links außen.
- $\ldots$
- $\mathbf{k=10}$ bedeutet „immer nach rechts abbiegen“ oder somit auch „nie nach links abbiegen“ und damit landet man im Fach ganz rechts außen.

Es gilt für die Treffen und die Gegenwahrscheinlichkeit $p=1-p=0,5$. Wie oben schon beschrieben, werden im Galton-Brett im Schülerlabor 10 Stufen durchlaufen, es handelt sich also um eine 10-stufige Bernoullikette, $n=10$.

$$P(X=k)=\binom{10}{k}\cdot 0,5^k\cdot 0,5^{(10-k)}=\binom{10}{k}\cdot 0,5^{10}$$

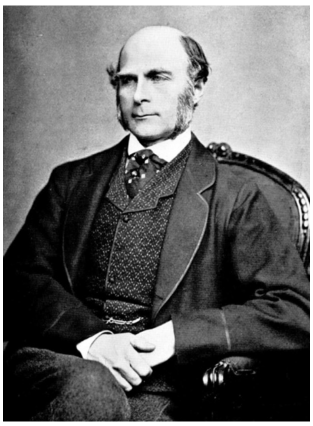
Diese Formel entspricht der Berechnungsform von zuvor: $\binom{10}{k}$ sind die günstigen Fälle für das Fach k und $0,5^{10}=\frac{1}{2^{10}}$, also alle möglichen Fälle in Stufe 10.
Es ergibt sich ebenso:

$$P(\text{außen})=P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0,5^{10}=\frac{1}{1024}\approx 0,00098$$
$$P(\text{Mitte})=P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot 0,5^{10}=\frac{252}{1024}=0,24609375$$

Geschichte

„Sir Francis Galton (1822-1911) war ein britischer Naturforscher, der sich auf vielen Gebieten einen Namen machte. Er war ein Cousin von Charles Darwin (1809-1882), unternahm verschiedene Forschungsreisen und veröffentlichte bedeutende Arbeiten auf den Gebieten der Meteorologie, Psychologie, Daktyloskopie (Lehre von den Fingerabdrücken), zur Intelligenz der Masse und zur Statistik. Das heute so genannte Galton-Brett diente ihm einerseits zur Klärung wichtiger Begriffe in der Forschung, andererseits setzte er es auch sofort nach Fertigstellung in der Lehre ein, zum ersten Mal am 17. Februar 1874 bei einer Vorlesung in der Royal Society.“

(Quelle: Beutelspacher, Albrecht: Wie man in eine Seifenblase schlüpft : Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten. München: C.H.Beck, 2015.)



Quelle: `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ec/Francis_Galton_1850s.jpg`

(Stand: 26.07.22)