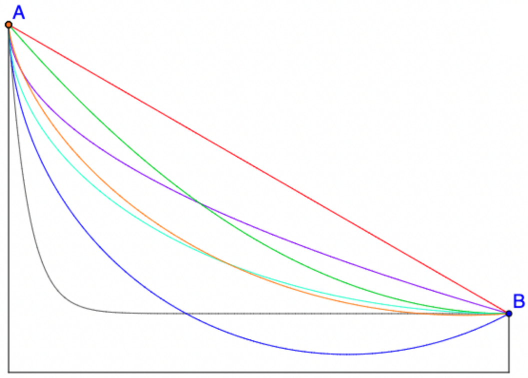
Karlsruher Institut für Technologie

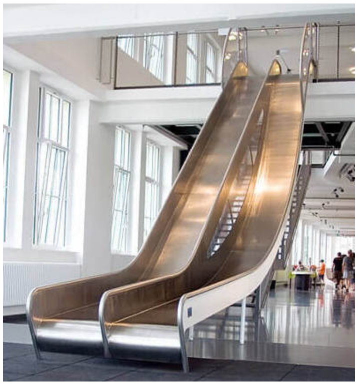
Brachistochrone

Stelle dir vor, du hast zwei Punkte - einen Anfangs- und einen Endpunkt, die auf verschiedenen Höhen liegen. Diese Punkte können auf verschiedene Weise miteinander verbunden werden. Die Brachistochrone bezeichnet die Verbindung, bei der ein Massepunkt unter Einfluss der Erdanziehungskraft, am schnellsten vom Start zum Ziel kommt. Der Name „Brachistochrone“ stammt aus dem Griechischen: *brachystos* = kürzeste, *chronos* = Zeit. Achtung: Die Brachistochrone ist dabei zwar die zeitlich kürzeste / schnellste Verbindung der beiden Punkte, jedoch nicht streckenmäßig. Das ist immer eine Gerade!

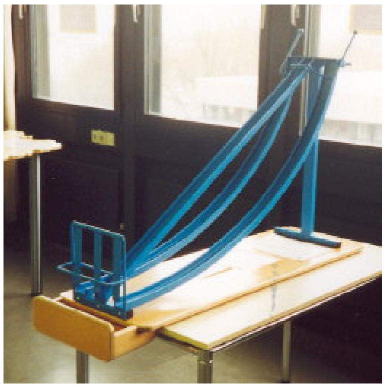


Quelle: `https://www.geogebra.org/m/xRZeBHFV` (Stand: 10.01.22)

Du kannst dir die verschiedenen Verbindungen als Rutschbahnen vorstellen, oder wie bei uns im Labor als Bahnen, auf denen man eine Kugel rollen lässt.



Quelle: `https://atlantics.de/produkte/spielrutschen/indoorrutschen/dynamikum-pirmasens/` (Stand: 10.01.22)

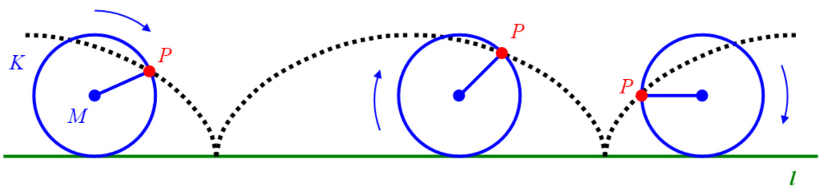


Quelle: `http://www.kugelbahn.info/bilder/schnell/beutel_b02.jpg` (Stand: 10.01.22)

Mit dem Problem des schnellsten Falles hat sich als erster Johann I Bernoulli beschäftigt. Im Jahre 1696 fand er schließlich die Lösung in der Brachistochrone. Heute sieht man dies oft als die Geburtsstunde der Variationsrechnung. Die Variationsrechnung ist wichtig für das Lösen von Minimierungs- oder Maximierungsproblemen. Sie wurde im 18. Jahrhundert vor allem von den Mathematikern Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange geprägt. Zentrales Element der Variationsrechnung ist die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{f}{\partial y'} = 0$$

Die Lösung des Brachistochronenproblems ist die Zykloide. Die Zykloide wird auch Rollkurve genannt. Das liegt daran, dass sie die Bahn eines Randpunktes eines rollenden Rades beschreibt.



Quelle: `http://www.maphi.de/mathematik/grafiken/zykloide.jpg` (Stand: 10.01.22)

Wie stark sich die verschiedenen Bahnen bezüglich ihrer Geschwindigkeit unterscheiden, kannst du die selbst in GeoGebra anschauen: `https://www.geogebra.org/m/xRZeBHFV`