Wolfgang Riemer, Köln

KIT 20.02.2026

Ein roter Faden durch die Stochastik

Wenn man darauf verzichtet, Wahrscheinlichkeiten als objektiv - unabhängig vom Menschen - existierende Größen zu begreifen, sie stattdessen konsequent als unsichere und revidierbare Festlegungen deutet, die als Modelle dadurch entstehen, dass aus Erfahrung Erwartung wird, verschwinden viele didaktische Probleme.

Ein roter Faden durch die Stochastik

- Abstract
- Standpunkt
- Drei Kopfsprünge
- Prognose- und Konfidenzinzervalle -> Reimund Vehling
- Bayes erleben!
- Bayes stolpert über Ω …
  fängt das Permanenzprinzip ihn auf (?)
- Resümee

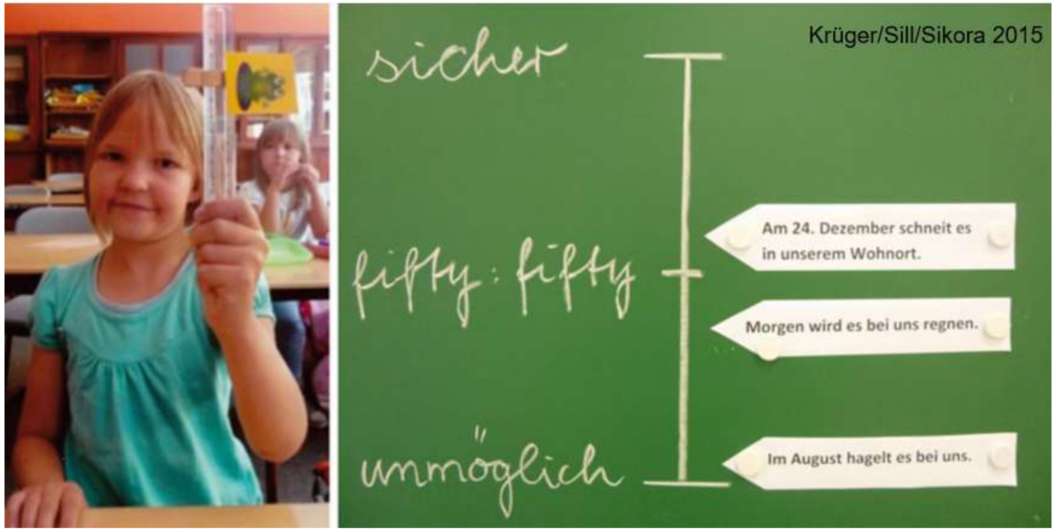
Hermann Dinges (1976)

- Der objektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff, ist für den Anfangsunterricht geeignet, hat aber Grenzen.
- Wahrscheinlichkeitstheorie braucht den Begriff der Hypothese.
- Die Bayessche Formel braucht subjektive Wahrscheinlichkeiten.

Tobias Rolfes (AK Stochastik 2023)

- Die Bildungsstandards von der Primar- und Sekundarstufe sind bzgl. des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wenig abgestimmt.
- Die mangelnde Integration Laplacescher / frequentistischer Wahrscheinlichkeiten sorgt für Verständnisschwierigkeiten.
- Wie lassen sich die unterschiedlichen Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff so unterrichten, dass intuitive Schülervorstellungen gewinnbringend in den Stochastikunterricht einfließen?

kleine+GROßE Menschen erleben Wahrscheinlichkeiten ganz anders:
Als unsichere Festlegungen,
*die **im Bauch entstehen**,* wenn aus
Erfahrung Erwartung wird.



Realität Modell

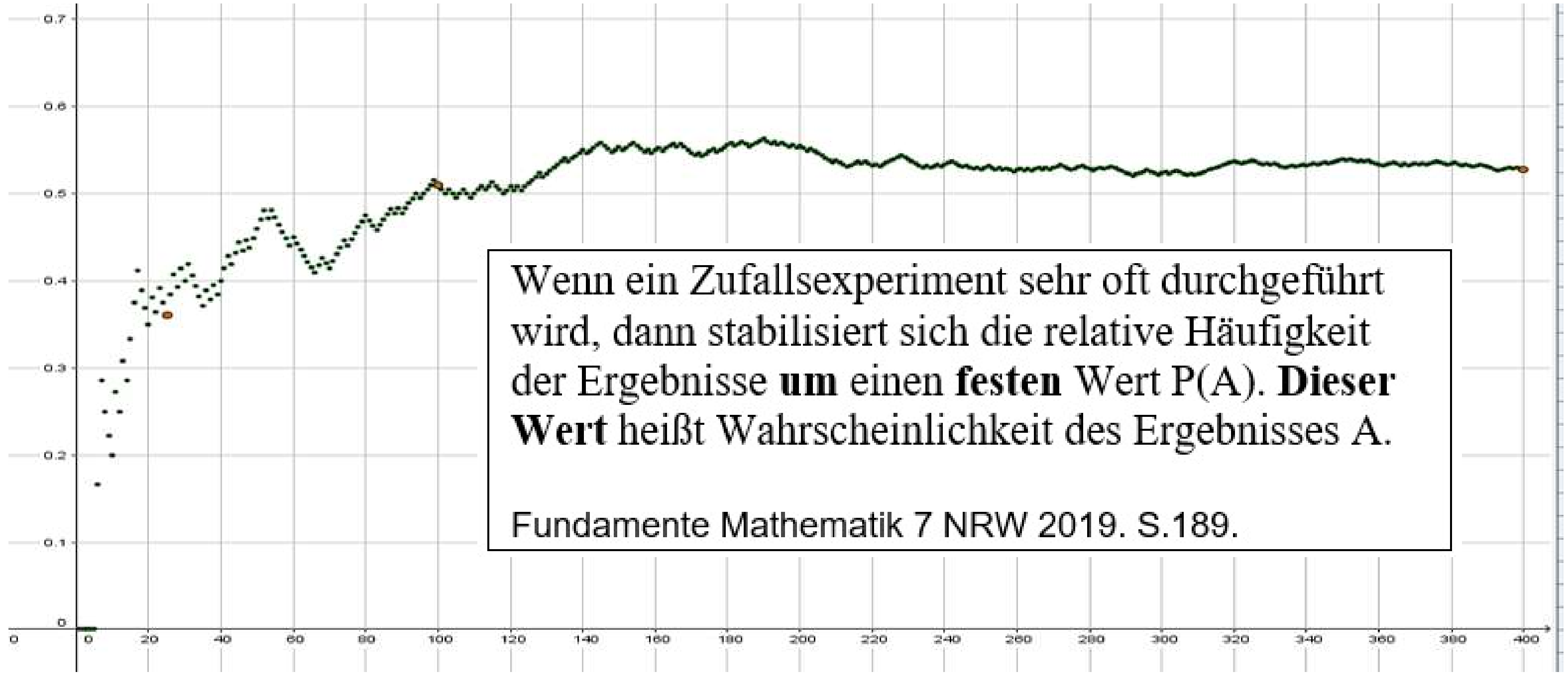
Stichprobe Grundgesamtheit ☹

Ich war nie Modell! Frag Laplace!

Erfahrung aus…	da regiert…	Sicherheit Vertrauen
Abzählen Symmetrie Dreisatz	**Laplace** - mathematisch	Mathe ist **absolut** sicher und genau
„∞ " vielen Versuchen	**v. Mises** - frequentistisch - statistisch	Je **mehr** desto sicher
Alltag Medien Peers Omas	**Bayes** - subjektivistisch	Je **lauter/öfter** desto sicher

Die Bayessche Regel, beschreibt die Veränderung des Vertrauens $P_A(M)$ in Modelle.
Fragen an Norbert + H. Dinges:
- Sind Modelle Ereignisse $\subseteq \Omega$?
- Ist Vertrauen in Modelle Wahrscheinlichkeit?

„Statistische Wahrscheinlichkeit“ ***verkuddelmuddelt*** Modell und Wirklichkeit perfekt



Wenn ein Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt wird, dann stabilisiert sich die relative Häufigkeit der Ergebnisse **um** einen **festen** Wert P(A). **Dieser Wert** heißt Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses A.

Fundamente Mathematik 7 NRW 2019. S.189.

Lord Voldemort:

- „der dessen Name nicht genannt werden darf“
- „du weißt schon, wer“.

frequentistische Wahrscheinlichkeit:

- „die, deren Wert nicht bestimmt werden kann“
- „du weißt schon welche

H. Dinges Probleme mit der Bayesschen Regel - MPhS 1978 113 - 156

Schulbuchautoren … zerstören gereifte Begriffe und werten fruchtbare Vorstellungs- und Sprechweisen ab, bis auf dem erreichten traurigen Niveau der Argumentation die Bayessche Regel nichts Wichtiges zu besagen scheint und somit leicht "verstanden" werden kann. Sie erledigen die Bayessche Regel … durch Zerlegen von Ω

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

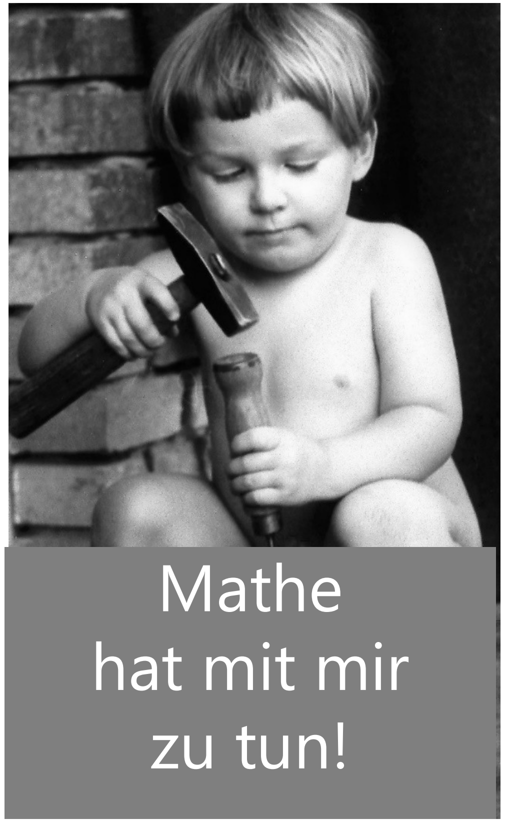
Daraus gewinnt man die nach Bayes[1] benannte Formel für die Zerlegung von Ω in zwei Ereignisse:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}}$$

Das IQB hat das Problem gelöscht!

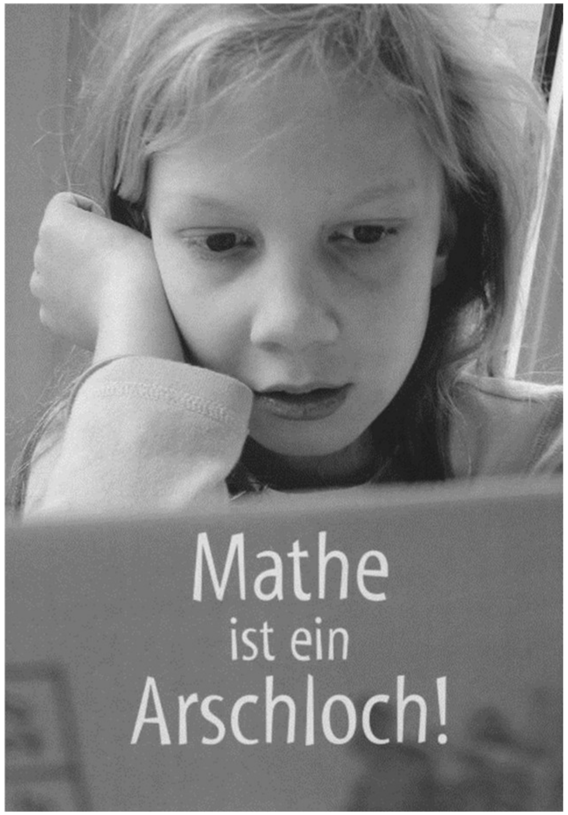
Ich hoffe, daß irgendwann Darstellungen der Bayesschen Regel gefunden werden, die den recht verstandenen Ansprüchen der Schule und der Lehrerausbildung genügen.

- Abstract
- Standpunkt
- Drei Kopfsprünge
- Bayes …
- stolpert über Ω …
  fängt das Permanenzprinzip ihn auf (?)
- Resümee



Abenteuerspielplatz
Handeln
Entdecken
Sprechen
Werkzeugkompetenz
Selbstwirksamkeits-
erfahrung

Krankenhaus
Untersuchen
Besprechen
Behandeln
Einführen



$P(H|D)$ versus $P(D|H_0)$? Wie man das Testen von Hypothesen – lieber doch nicht – einführen sollte RAPHAEL DIEPGEN, BOCHUM

Auf der Suche nach
Alternativen zum Einführen …
Nicht nur beim Hypothesentest?

- Stelle einen Kontext ins Zentrum.
- Schenke ! „Kindern“ ein für sie ! „relevantes“ Problem
- Gib ihnen Raum, sich aktiv mit diesem auseinanderzusetzen
- Langweile sie nicht mit Formalismen

(Hans Freudenthal)

- Abstract
- Standpunkt
- Drei Kopfsprünge
- Bayes …
- stolpert über Ω …
  fängt das Permanenzprinzip ihn auf (?)
- Resümee

Ein Abstecher in das Bermudadreieck Δ(CWS) mit den Eckpunkten **C**hance, **W**ahrscheinlichkeit und **S**icherheit

Abenteuerspielplatz: Hol die „OMA“ aus der Socke!

Kopfsprung ohne Vorkurs beschreibende Statistik

Wie groß ist die > **Chance** < dass Hannah die OMA erwischt?

AOM AMO
OAM OMA
MAO MOA

Anteile von Anteilen, Pfadregel

● -------> O -------> M -------> A

1/3

P(„OMA“) = $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

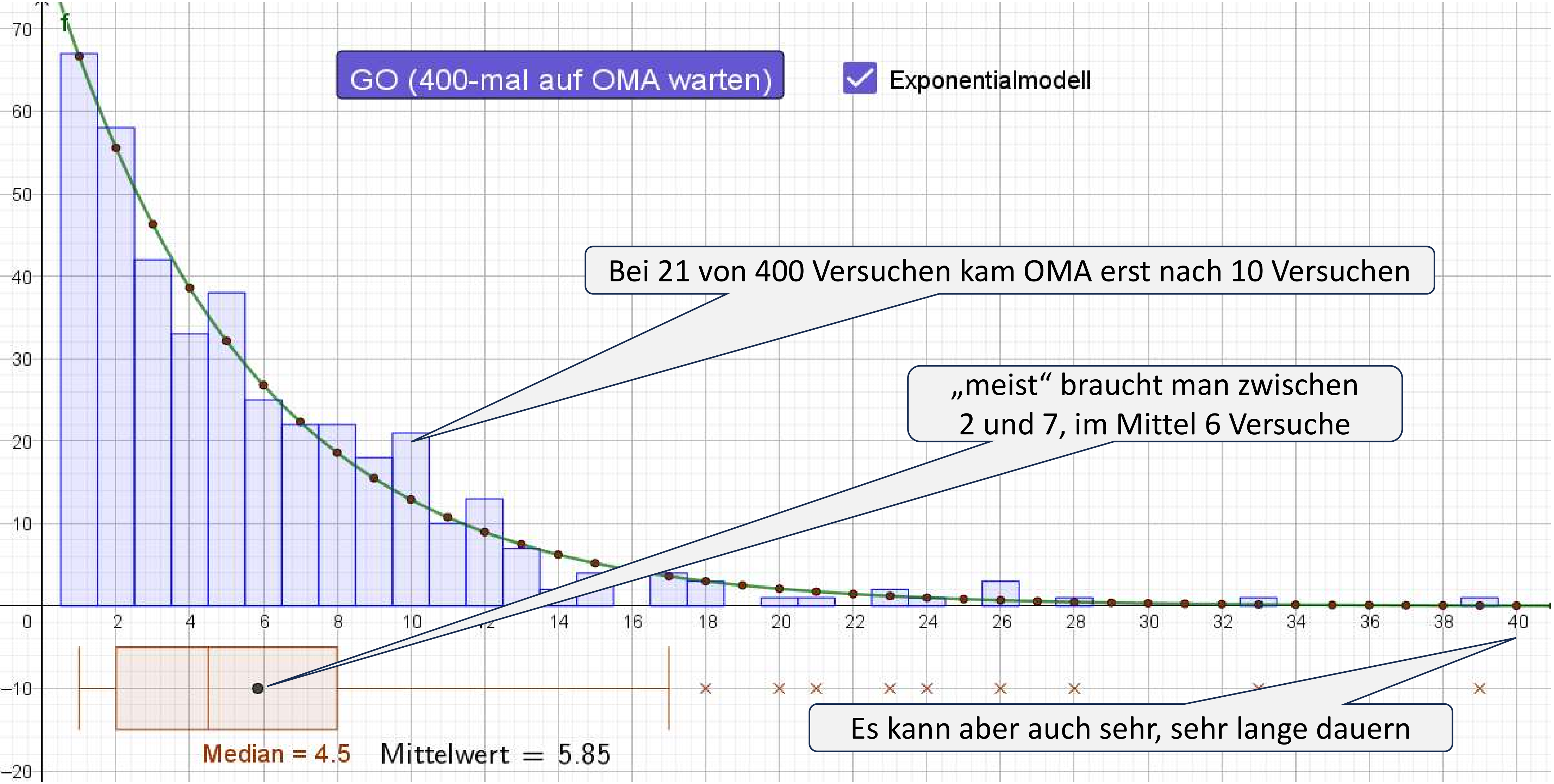
Bei 30 Kindern erwartet man 5 Gewinne
Erwartetes Mittel
= Erwartungswert

- kognitiv aktivierend keine Würfelbude!
- **Laplace** trifft **Bauchgefühl „Chance“**
- Experimentieren: Chance wird Wahrscheinlichkeit
- **frequentistische Sicht schenkt die Pfadregel**
- **bedingte Wahrscheinlichkeiten leben**

Alle Buchstaben zweimal: doppelte Wahrscheinlichkeit? $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{15}$

P dazu gibt auch dem OPA eine Chance $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Warten auf die OMA: Modell und Wirklichkeit



Laplace-Wahrscheinlichkeiten

- fühlt man im Bauch
- Verkommen in Büchern schnell zum Rechen-Zoo
- liegen so irre eindeutig auf der Hand,
  dass der Modellcharakter von WK nicht bewusst wird
  (sehr, sehr sichere Festlegungen)
- eigenen sich deswegen perfekt, um
  - die Größe von Zufallsschwankungen zu erforschen
    $1/\sqrt{n}$ - Gesetz, Prognoseintervalle
  - Kinder mit Kombinatorik herauszufordern (… zu quälen?)

Alle Buchstaben zweimal

1	o	m	**a**	m	o	a	a	o	m	O	o	m	M	o	m	A	o	m
2	o	m	O	m	o	O	a	o	O	O	o	a	M	o	a	A	o	a
3	o	m	M	m	o	M	a	o	M	O	o	M	M	o	O	A	o	O
4	o	m	**A**	m	o	A	a	o	A	O	o	A	M	o	A	A	o	M
5	o	a	m	m	a	o	a	m	o	O	m	o	M	m	o	A	m	o
6	o	a	O	m	a	O	a	m	O	O	m	**a**	M	m	a	A	m	a
7	o	a	M	m	a	M	a	m	M	O	m	M	M	m	O	A	m	O
8	o	a	A	m	a	A	a	m	A	O	m	**A**	M	m	A	A	m	M
9	o	O	m	m	O	o	a	O	o	O	a	o	M	a	o	A	a	o
10	o	O	a	m	O	a	a	O	m	O	a	m	M	a	m	A	a	m
11	o	O	M	m	O	M	a	O	M	O	a	M	M	a	O	A	a	O
12	o	O	A	m	O	A	a	O	A	O	a	A	M	a	A	A	a	M
13	o	M	m	m	M	o	a	M	o	O	M	o	M	O	o	A	O	o
14	o	M	**a**	m	M	a	a	M	m	O	M	m	M	O	m	A	O	m
15	o	M	O	m	M	O	a	M	O	O	M	**a**	M	O	a	A	O	a
16	o	M	**A**	m	M	A	a	M	A	O	M	**A**	M	O	A	A	O	M
17	o	A	m	m	A	o	a	A	o	O	A	o	M	A	o	A	M	o
18	o	A	A	m	A	a	a	A	m	O	A	m	M	A	m	A	M	m
19	o	A	O	m	A	O	a	A	O	O	A	a	M	A	a	A	M	a
20	o	A	M	m	A	M	a	A	M	O	A	M	M	A	O	A	M	O

mühsam! $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$

leicht $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{15}$

- Abstract
- Standpunkt
- Drei Kopfsprünge
- Bayes …
- stolpert über Ω …
  fängt das Permanenzprinzip ihn auf (?)
- Resümee

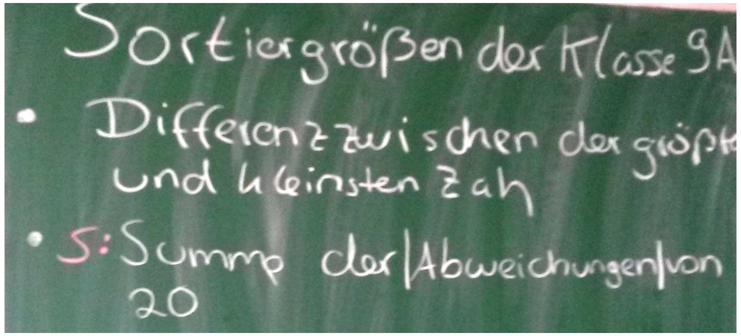
Tests **Erleben** statt Einführen … **„Würfeln“ mit Sechskantstiften**

- **Rollt** 120-mal linksrum 120-mal rechtsrum
- Notiert nach Bauch-gefühl, wie gut „das“ //Laplace// passt.
- **Erzählt,** was ihr euch bei der Bewertung gedacht habt.

Vorname	Sechskant-Bleistift Spitze weg vom Bauch 60+60-mal (re->li) 60+60-mal (li->re)																Bauchgefühl: Laplace passt: ganz gut	weniger gut	schlecht	sehr schlecht
Clara	r->l	5	12	10	8	10	15	60	r->l	12	14	24	19	22	29	120		x		
	r->l	7	2	14	11	12	14	60	l->r	16	28	20	18	17	21	120			x	
	l->r	9	17	8	9	4	13	60	mix	14	29	18	17	14	28	120			x	
	l->r	7	11	12	9	13	8	60	mix	14	13	26	20	25	22	120	x			
Philipp	r->l	8	8	23	1	9	11	60	r->l	11	20	41	1	16	31	120			x	
	r->l	3	12	18	0	7	20	60	l->r	40	15	8	36	18	3	120				x
	l->r	17	8	4	18	11	2	60	mix	25	16	27	19	20	13	120		x		
	l->r	23	7	4	18	7	1	60	mix	26	19	22	18	14	21	120			x	
Daniel	r->l	10	12	21	4	5	8	60	r->l	11	32	37	6	5	29	120		x		
	r->l	1	20	16	2	0	21	60	l->r	23	8	3	35	30	21	120				x
	l->r	10	3	1	21	11	14	60	mix	20	15	22	25	16	22	120			x	
	l->r	13	5	2	14	19	7	60	mix	14	25	18	16	19	28	120			x	

- Welche der Verteilungen ist am Laplace‘sten, welche am wenigsten?
- **Erfindet** Sortiergrößen für den Zweifel!

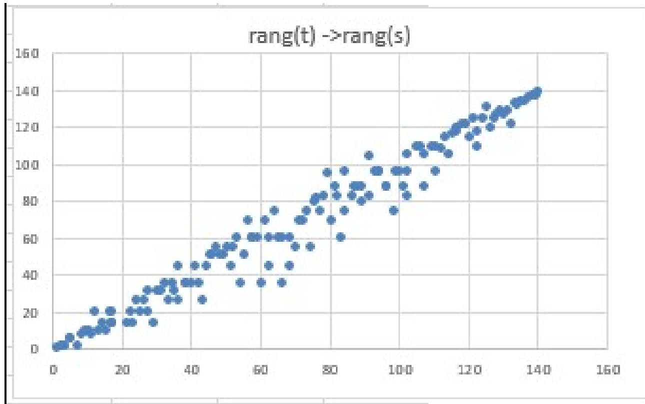
4	13	28	16	29	30

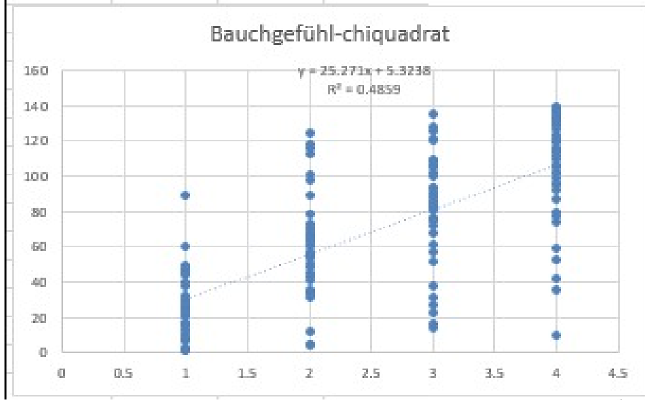


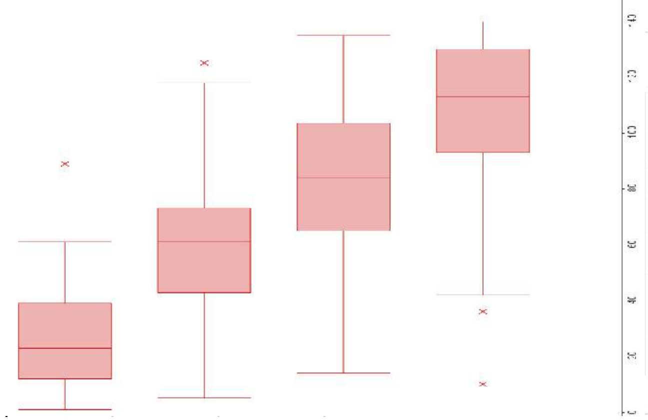
- **a:** die **A**nzahl der Augenzahlen, die besonders selten (≤10) oder besonders häufig (≥ 30) auftraten -> 2
- **g:** die **g**rößte |Abweichung| vom Sollwert 20 -> 16
- **u:** der **U**nterschied zwischen der größten und der kleinsten Häufigkeit -> 26
- **s:** die **S**umme aller |Abweichungen| vom Sollwert -> 54
- **q:** die Summe der **Q**uadrate aller Abweichungen -> 566
- **t :** q/20 (-> Chiquadra**t**, handlicher als q) -> 28.3
- **k: K**olmogoroff-Smirnoff
  Max(|4-20|, |17-40|, |45-60|, |61-80|, |90-100|) -> 23

alle sortieren den Zweifel ähnlich!
alle passen zum Bauchgefühl!

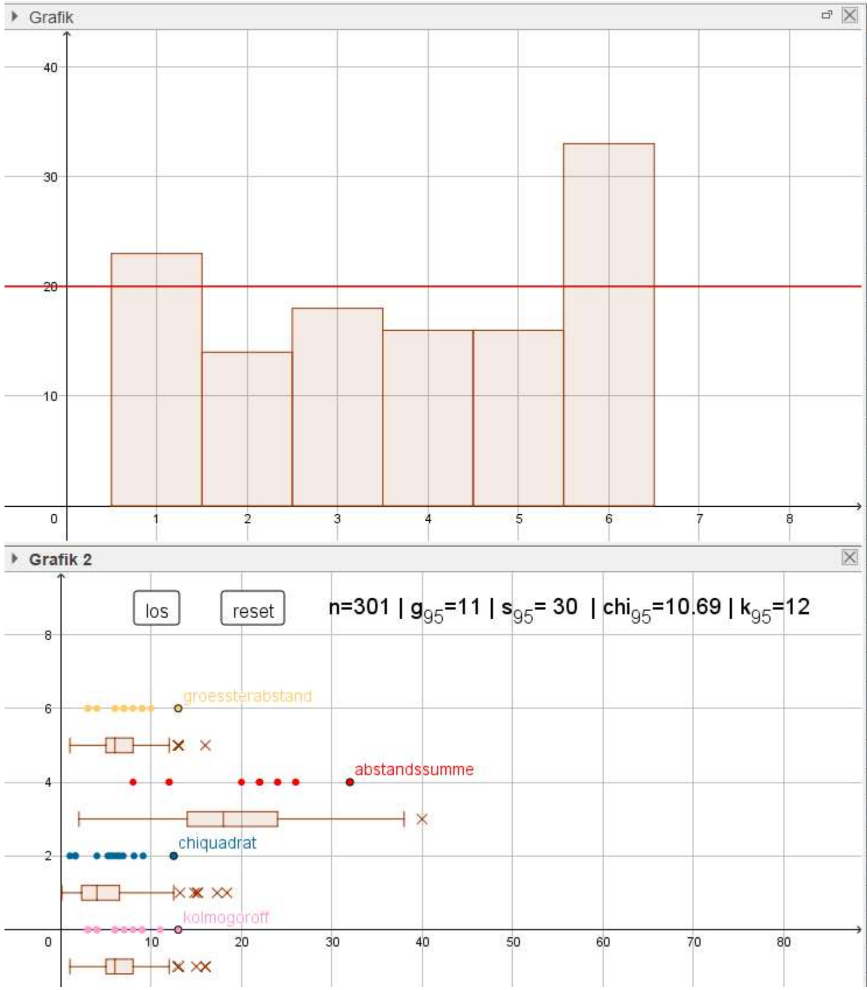
		eigene Bleistifte zweimal gleiche, zweimal unterschiedliche Rollrichtungen							Laplace passt					Rangposition				
									ganz gut	weniger gut	schlecht	sehr schlecht	Bauchgefühl					
		1	2	3	4	5	6		Bauchgefühl				b	t	s	g	u	a
Clara	r->l	12	14	24	19	22	29	120		x			2	49	51	46	52	1
	l->r	16	28	20	18	17	21	120			x		3	23	14	33	22	1
	mix	14	29	18	17	14	28	120			x		3	57	61	46	41	1
	mix	14	13	26	20	25	22	120	x				1	40	36	20	28	1
Philipp	r->l	11	20	41	1	16	31	120			x		3	126	120	123	128	109
	l->r	40	15	8	36	18	3	120				x	4	130	128	118	124	126
	mix	25	16	27	19	20	13	120		x			2	35	32	20	36	1
	mix	26	19	22	18	14	21	120			x		3	17	14	14	22	1
Daniel	r->l	11	32	37	6	5	29	120		x			2	125	132	96	110	126
	l->r	23	8	3	35	30	21	120				x	4	115	117	96	110	126
	mix	20	15	22	25	16	22	120			x		3	14	14	10	12	1
	mix	14	25	18	16	19	28	120			x		3	38	36	33	36	1
Katrin	r->l	25	27	34	0	7	27	120				x	4	119	122	118	119	109
	l->r	4	1	0	70	37	8	120				x	4	140	140	140	140	139
	mix	14	11	19	32	30	14	120			x		3	81	88	71	69	79
	mix	15	17	15	38	14	21	120			x		3	84	75	106	85	56







- Simuliert 2 Minuten. Beamt eurer bestes | schlechtestes Produkt.
- Einigt euch auf ein ROTE LINIE, die *echtes Laplace* höchst selten reißt!



Tabelle

J9 chi²

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	6	3	4	1	3	1	1	23	3	9	23	3
2	5	6	1	1	1	5	2	14	6	36	37	3
3	6	4	6	4	6	3	3	18	2	4	55	5
4	3	2	4	2	6	6	4	16	4	16	71	9
5	3	5	1	6	5	4	5	16	4	16	87	13
6	4	6	5	3	2	5	6	33	13	169	120	0
7	6	5	6	4	1	2			13	g		
8	6	6	6	2	4	1			32	s		
9	1	4	2	3	3	2			12.5	chi²		
10	4	6	5	4	1	2			13	k		
11	2	5	3	6	5	5						
12	1	6	2	3	1	6						
13	3	6	1	5	3	6						
14	4	1	2	6	3	3						
15	6	6	3	1	4	6						
16	6	2	6	6	4	1						
17	3	6	2	1	1	6						
18	6	1	4	5	6	1						
19	6	5	4	5	5	1						
20	1	2	6	3	3	6						
21												
22												
23												
24												
25												
26												
27												
28												
29												

Die 33 bei 6 ist krass!
Viele Stifte sind krasser!

13	g
32	s
12.5	chi²
13	k

Bei Laplace fast immer
$g<11$ $s<30$ $chi^2<11$ $k<12$

Durch Benchmarks
g<11 s<30 chi²<11 k<12
werden Zweifel-Sortiergrö-ßen zu Testgrößen. Die Frage: „Laplace annehmen oder ablehnen?“ ist falsch gestellt. Es geht, NUR um die Bewertung der Modellgüte!

Sechskant-Bleistiftwürfel 120-mal rechtsrum 120-mal linksrum gerollt								Σ (H-20)²/20	Σ|H-20|	MAX|H-20|	MAX(H)-MIN(	#≤10+#≥30
	1	2	3	4	5	6		t	s	g	u	a
Kira re	37	42	15	9	12	5	120	60.4	78.0	22	37	4
Kira li	23	20	18	21	15	23	120	2.4	14.0	5	8	0
Felix re	18	21	26	17	11	27	120	9.0	28.0	9	16	0
Felix li	22	13	22	23	15	25	120	5.8	24.0	7	12	0
Julia re	21	22	10	9	31	27	120	19.8	42.0	11	22	3
Julia li	18	23	24	18	17	20	120	2.1	14.0	4	7	0
Anna re	4	18	45	1	29	23	120	66.8	74.0	25	44	3
Anna li	33	9	22	7	11	38	120	43.4	66.0	18	31	4
Lea re	0	33	24	9	19	35	120	46.6	64.0	20	35	4
Lea li	28	50	38	0	0	4	120	117.2	112.0	30	50	5
Catherin re	15	17	8	20	17	43	120	35.8	46.0	23	35	2
Catherin li	14	7	16	7	30	46	120	58.3	72.0	26	39	4
Paul re	32	26	14	36	5	7	120	43.3	68.0	16	31	4
Paul li	30	21	17	26	19	7	120	15.8	34.0	13	23	2
Anne li	24	15	13	19	27	22	120	7.2	26.0	7	14	0
Anne re	33	30	20	13	13	11	120	22.4	46.0	13	22	2
Dominik re	1	26	39	7	22	25	120	47.8	64.0	19	38	3
Dominik li	16	22	21	49	6	6	120	62.7	64.0	29	43	3
Stefanie re	37	35	23	13	5	7	120	48.3	70.0	17	32	4
Stefanie li	5	1	2	88	15	9	120	284.0	136.0	68	87	5
Lukas re	16	27	20	20	17	19	119	3.8	15.0	7	11	0
Lukas li	22	14	23	18	25	18	120	4.1	20.0	6	11	0
Luise re	14	40	35	5	4	22	120	57.3	74.0	20	36	4

Kontrapunkt … nicht nur in BW

Vermutung: $p = \frac{1}{6}$, n = 300 -> k= 50 Treffer

35 Treffer liegt außerhalb 2σ-Umgebung

Damit erscheint die Vermutung unwahrscheinlich

wie unwahrscheinlich?

Wir können nicht sicher sein, dass die Vermutung falsch ist.

Wenn wir behaupten aufgrund unseres Tests wäre $p = 1/6$ widerlegt,

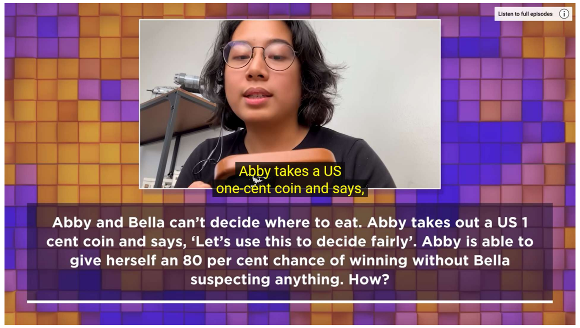
so irren wir uns mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 5%.

Genauer: P(Irrtum)=P(X<38)+P(X>62)=0,052

„Also liegen wir zu 95% richtig! Logisch, oder?“

Nur Handeln / **Erleben dass Wahrscheinlichkeiten unsichere Festlegungen/Modelle** sind impft gegen Fehlvorstellungen.

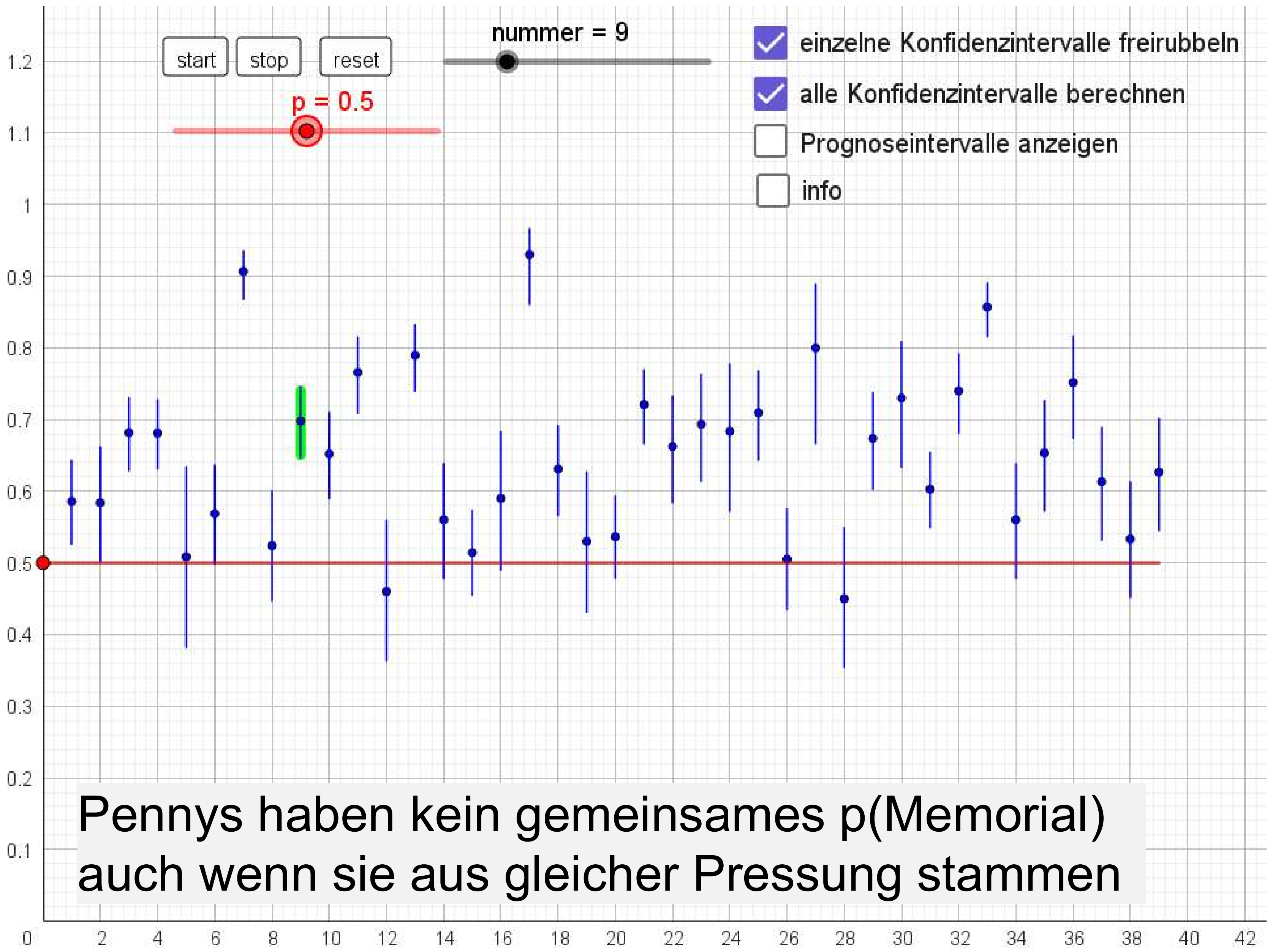
Erfahrung: Fifty-Fifty!



Immer noch Fifty-Fifty?

Wie Maikes Vertrauen ins Laplace Modell verschwindet

Vorname Maike	Ihre Penny Nr. 29 / 1976			Ihre Einschätzung				
	Strichlisten			Laplace-Modell passt ...				
	Lincoln (L)	Memorial (M)	n	++	+	O	-	--
nach Tom Scots Film	xxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxx	0		X			
nach 10 Versuchen	IIII	𝍸 I	10	X				
nach weiteren 15 Versuchen	𝍸 I	𝍸 IIII	25		X			
nach weiteren 25 Versuchen	𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 𝍸	50				X	
nach weiteren 50 Versuchen	𝍸 𝍸 𝍸 IIII	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	100				X	X
Summe	39	61	100				X	X


start
stop
reset
nummer = 9
p = 0.5
einzelne Konfidenzintervalle freirubbeln
alle Konfidenzintervalle berechnen
Prognoseintervalle anzeigen
info
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40
42
Pennys haben kein gemeinsames p(Memorial)
auch wenn sie aus gleicher Pressung stammen

- Abstract
- Standpunkt
- Drei Kopfsprünge
- Bayes …
- stolpert über Ω …
  fängt das Permanenzprinzip ihn auf (?)
- Resümee

Kopfsprung: Wahrscheinlichkeit ohne Vorkurs beschreibende Statistik

Schätze **die** **Chancen in %** OHNE Experiment!

	1	2	3	4	5	6
%						

Modelle(Gravitation)

Würfeln mit Quadern 0,2l Würfelbecher auf den Tisch g[illegible]ulpt

Schätzungen	1	2	3	4	5	6	Σ	Glaub-würdigk.
Rene'	10%	5%	35%	35%	5%	10%	100%	30%
Stefan	15%	10%	25%	25%	10%	15%	100%	10%
Alexa	10%	12%	35%	20%	15%	8%	100%	0%
Joanna	15%	15%	20%	20%	15%	15%	100%	0%
Jasmin	15%	5%	30%	30%	5%	15%	100%	50%
Fläche cm²	2.99	2.6	4.6	4.6	2.6	2.99	20.38	
	14.7%	12.8%	22.6%	22.6%	12.8%	14.7%	100%	10%

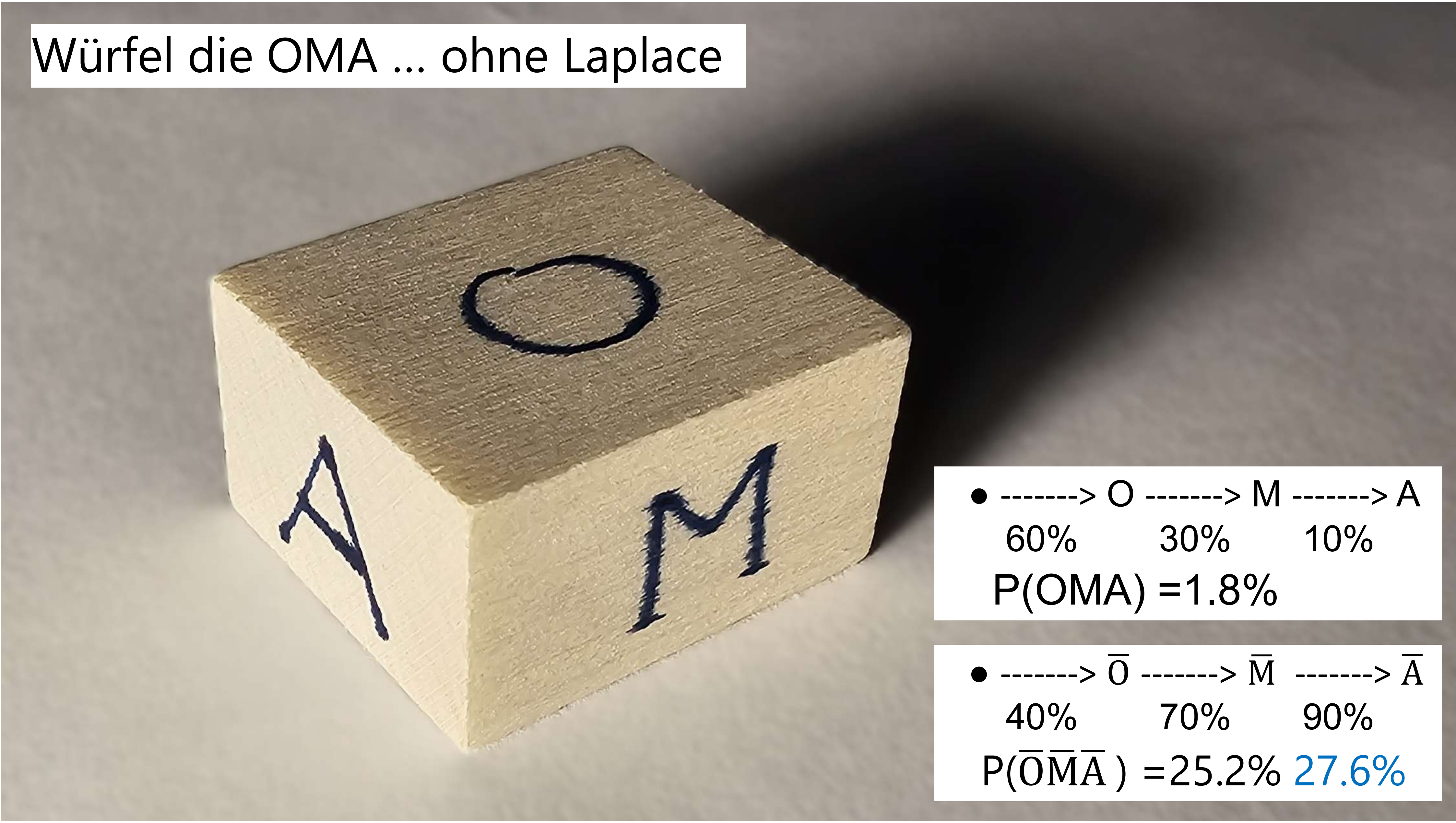
Schätzungen und "berechnete Propotionalitätshypothese"

Vertrauen in die Modelle

Laplace: Proportionalität

Aus guten Erfahrungen mit Symmetrien/Proportionalitäten und schlechten mit der Gravitation wurden Wahrscheinlichkeiten. Es handelt sich um unsichere Festlungen!

Würfel die OMA … ohne Laplace



- -------> O -------> M -------> A

  60% 30% 10%

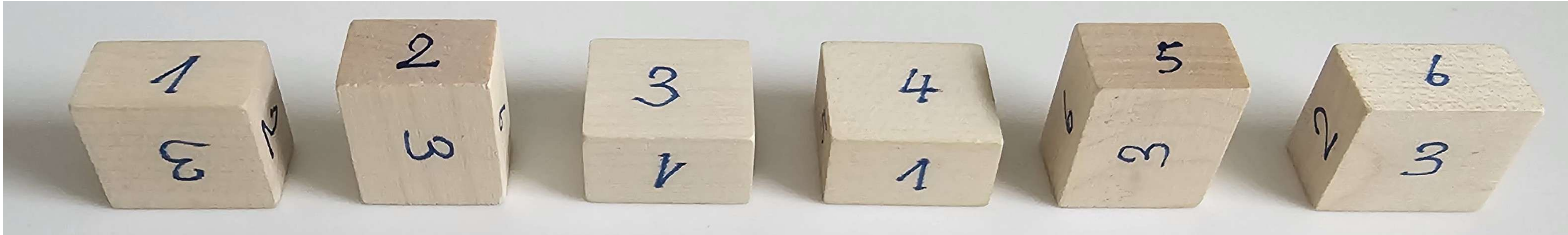
  P(OMA) =1.8%

- -------> $\overline{O}$ -------> $\overline{M}$ -------> $\overline{A}$

  40% 70% 90%

  P($\overline{O}\overline{M}\overline{A}$) =25.2% 27.6%

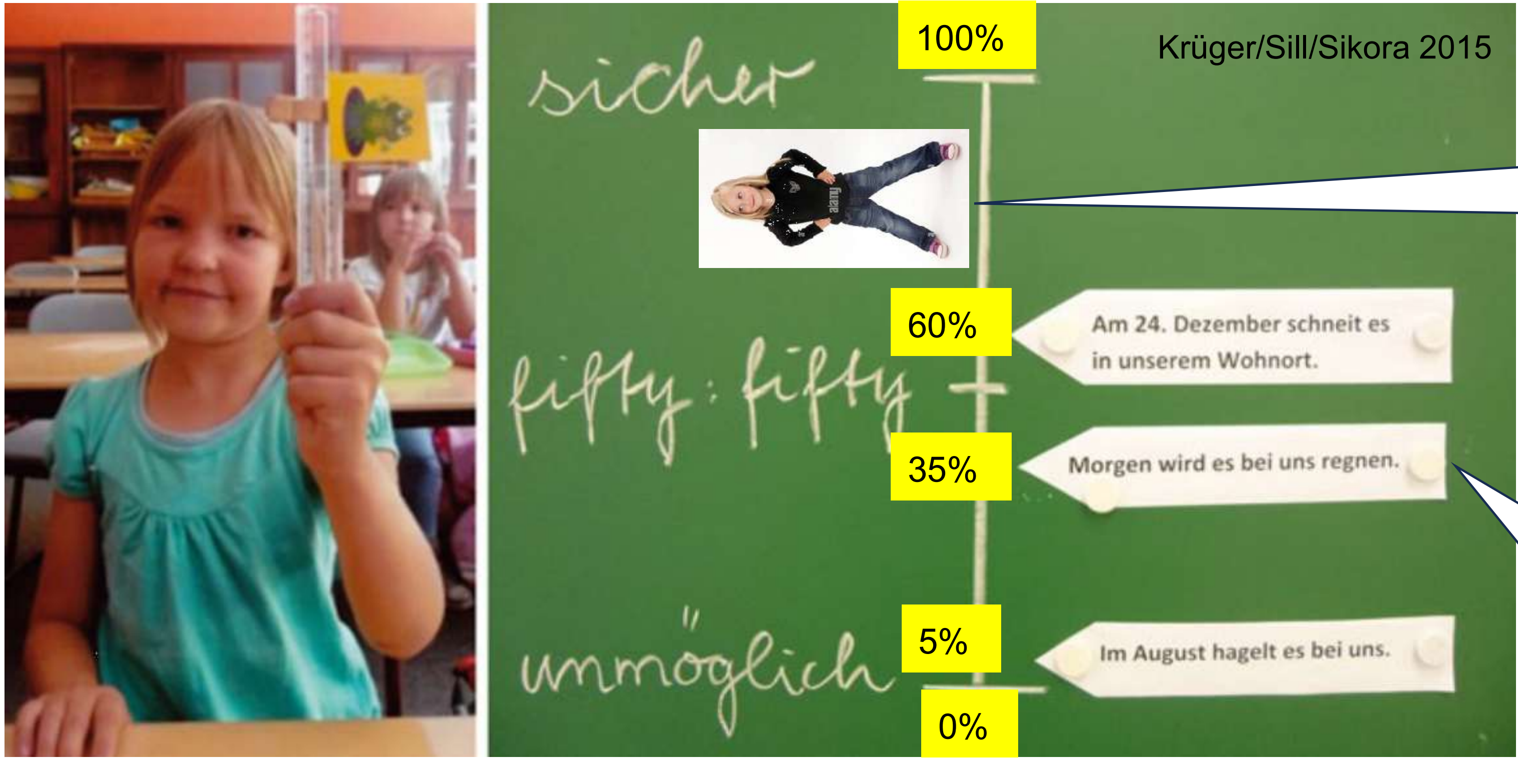
keine keine keine keine keine keine



entspannt locker riskant riskant locker entspannt

„Durchmarsch“

Warum der Kopfsprung klappt: Die sooo naheliegende Antwort auf große Fragen



Grundschulkinder kennen / nutzen Konfidenzintervalle

Unsichere Festlegung
- keine Laplace
- keine frequentistische Wahrscheinlichkeit

- NUR Durch die Beschriftung der Skalenenden mit 0% …100% wird die qualitative Primarstufenwahrscheinlichkeit durch Prozentangaben numerisch kommunizierbar.
- Zu jedem Prozentsatz gehört ein Prozentwert, den man erwartet, der Erwartungswert!
- WAHNSINN! Die Prognostizierbarkeit der Anteile schenkt uns in Kl. 7 die Pfadregel!
- **Für Wahrscheinlichkeit braucht man keinen Vorkurs beschreibende Statistik!**

- Erfahrungen aus vielen Versuchen
- verbessern die Festlegungen
- und machen sie weniger unsicher

I3 | =(1*B3+2*C3+3*D3+4*E3+5*F3+6*G3)/H3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Würfeln mit Quadern: 0,2l Würfelbecher auf den Tisch gestülpt								Mittelwert
2	Name	1	2	3	4	5	6		Erwartungswert
3	Patrick	10	6	28	41	4	11	100	3.560
4	Daniel	6	7	35	45	4	3	100	3.430
5	Binoy	7	4	37	34	1	17	100	3.690
6	Tobias	3	6	48	33	6	4	100	3.450
7	Michael	12	0	28	42	7	11	100	3.650
8	absolute H.	38	23	176	195	22	46	500	3.556
9	relative Häufigkeit	7.6%	4.6%	35.2%	39.0%	4.4%	9.2%	100%	3.556
10	Modell Gruppe 1	8%	4.5%	37.5%	37.5%	4.5%	8.0%	100%	3.500
11									
12	Paula	11	6	34	32	7	10	100	3.480
13	Elaine	14	10	28	24	9	15	100	3.490
14	Marie	4	6	41	32	11	6	100	3.580
15	Marga	10	6	34	29	7	14	100	3.590
16	Sandra	7	4	30	37	4	18	100	3.810
17	absolute H	46	32	167	154	38	63	500	3.590
18	relative Häufigkeit	9.2%	6.4%	33.4%	30.8%	7.6%	12.6%	100%	3.590
19	Modell Gruppe 2	10%	8%	32%	32%	8%	10%	100%	3.500
20									
54	alle zusammen	279	207	834	883	204	293	2700	3.520
55	relative Häufigkeit	10.3%	7.7%	30.9%	32.7%	7.6%	10.9%	100%	3.520
56									
57	Modell A	11%	8%	31%	31%	8%	11%	100%	3.500
58	Modell B	10.5%	8%	31.5%	31.5%	8%	10.5%	100%	3.500
59									
60	Proportionalitätsmodell: Kanten (cm)				2.3	2	1.3		
61	Fläche in cm²	2.99	2.60	4.60	4.60	2.60	2.99	20.38	3.500
62	Flächenanteil	14.7%	12.8%	22.6%	22.6%	12.8%	14.7%	100%	3.500

Kurz und knackig

Bei Zufallsexperimenten kann man einzelne Ergebnisse nicht vorhersagen, man kann ihnen aber Chancen zuordnen, die zusammen 100% ergeben.

Sie sind gut festgelegt, wenn

- man Symmetrien beachtet,
- die relativen Häufigkeiten um die Chancen pendeln

Kolmogoroff:
Hab ich schon
1933 gesagt!

Die Grundschul/Alltagschancen werden Mathe-Wahrscheinlichkeiten, sagen jetzt relative Häufigkeiten voraus und schenken uns dadurch die Pfadregel.

Die Zufallsschwanken werden mit wachsender Versuchszahl kleiner, das **Vertrauen in die Festlegungen** wächst mit zunehmender Erfahrung.

Die genaue Wahrscheinlichkeit kenn nur GOTT

Regelheft:

Realitätsebene	**Modellebene**
$h_1 + \cdots + h_n = 100\%$	$p_1 + \cdots + p_n = 1$
relative Häufigkeiten	Wahrscheinlichkeiten
leben im Becher	leben im Kopf
schauen zurück	schauen nach vorne
schwanken zufällig	werden festgelegt, bezweifelt, verbessert
Im Fall von Teilsymmetrien	
ungefähr gleich	genau gleich
Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \cdots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \cdots + x_n \cdot p_n$

Die genauen Wahrscheinlichkeiten kennt nur Gott!

Wahrscheinlichkeit ist Menschenwerk

KOLMOGOROFF hat das erkannt

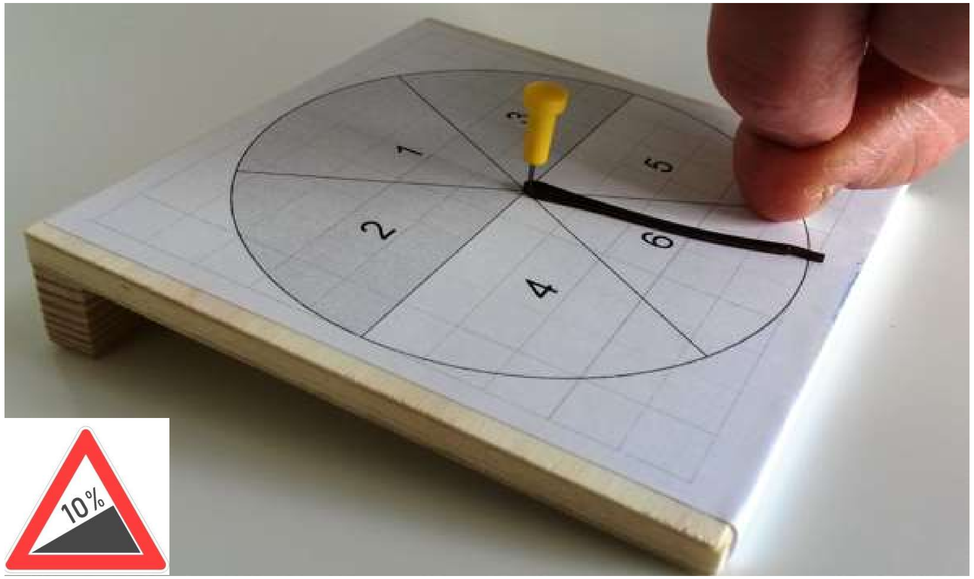
DUBUFFET hat das gemalt

Beide hat das IQB zum Abi nicht zugelassen

Schnippen statt quadern…

Schätze nach Bauchgefühl die **Chancen in %.**

	1	2	3	4	5	6
%						

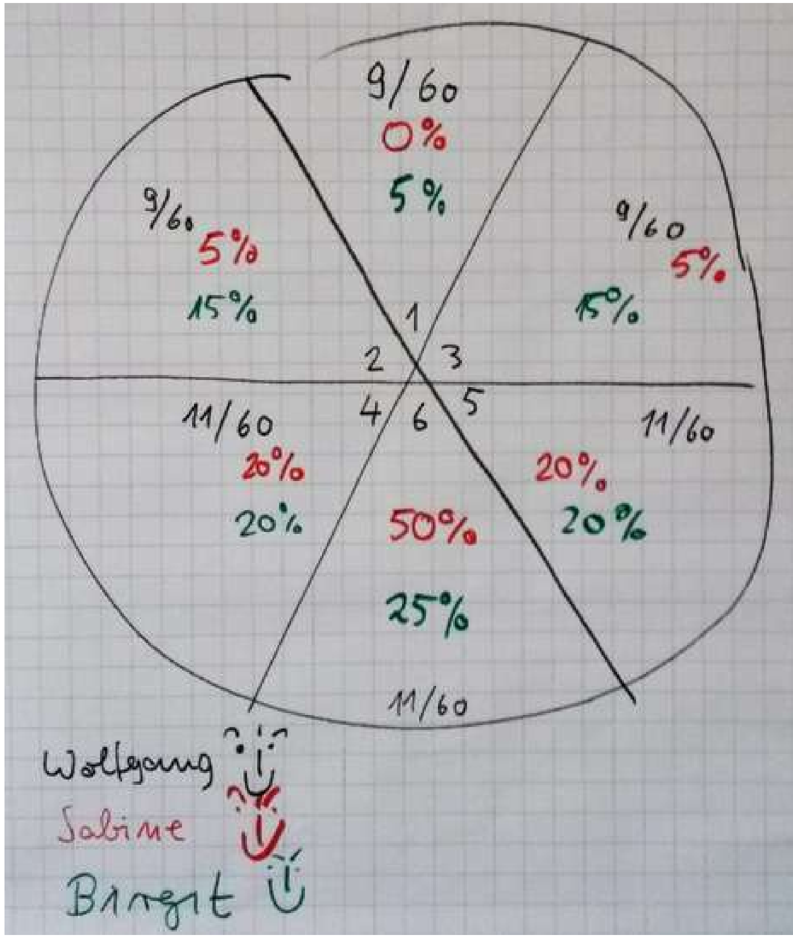


Die Wahrscheinlichkeit rutscht nach unten. Rechts und links ist es gleich.

Oben ist es wahrscheinlicher. Uhren bleiben immer kurz vor 12 stehen.

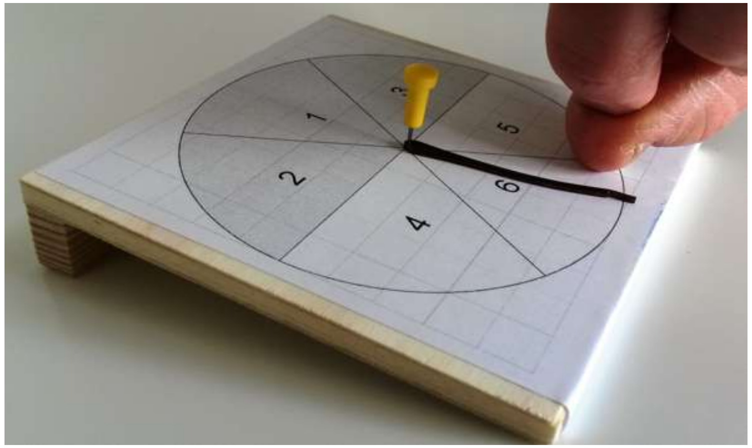
10% ist viel zu flach. Es bleibt bei 1/6 für jedes Feld,

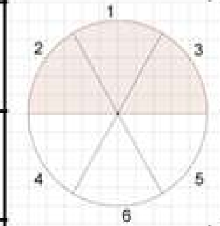
Am Ende bei 5 ist es am wahrschein-lichsten. Da ist der Schwung aufgebraucht.

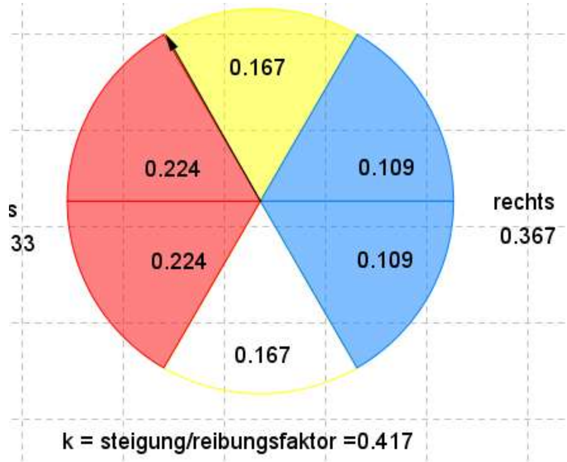


Aus guten Erfahrungen mit Symmetrien/Proportionalitäten und schlechten mit der Gravitation und dem Ermüden wurden Wahrscheinlichkeiten. Es handelt sich um unsichere Festlungen!

Realität (n=13021) Modell



	17.4%	
22.6%		10.3%
22.2%		10.7%
	16.8%	



Die Wahrscheinlichkeit rutscht nach links bergauf, nicht nach unten!
Aus p(rechts) = p(links) wird p(oben) = p(unten)

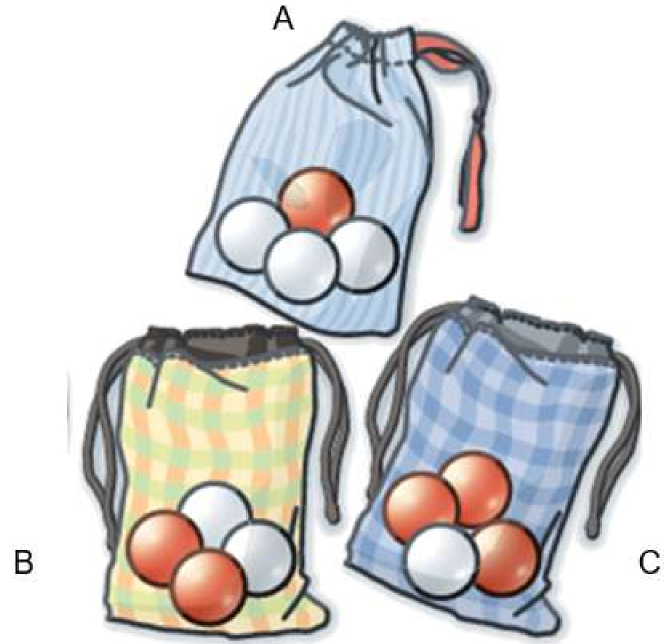
Sinusdichte: $f(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + k\,sin(x))$

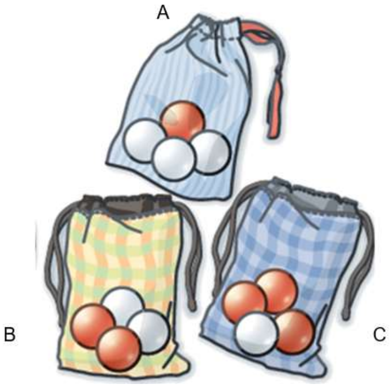
k ~ Steigung

- Abstract
- Standpunkt
- Drei Kopfsprünge
- Bayes …
- stolpert über Ω …
  fängt das Permanenzprinzip ihn auf (?)
- Resümee

Denn SINN von Bayes ENTDECKEN
Beschreibung der Entwicklung von Vertrauen
mit dem didaktischen Dreisatz
Spekulieren - Experimentieren – Reflektieren

Notieren Sie schrittweise Ihr „Vertrauen“ in % dafür, dass Lisa aus Beutel A, B oder C zieht…





No	I	A	B	C
0		33.3%	33.3%	33.3%
1	r	10%	40%	50%
2	w	20%	60%	20%
3	w	10%	40%	30%
4	r	20%	60%	20%
5	r	15%	50%	35%
6	r	10%	40%	50%
7	r	5%	35%	60%
8	w	3%	27%	70%
9	r	1%	19%	80%
10	r	1%	9%	90%

No	I	A	B	C
0		33.3%	33.3%	33.3%
1	r	17%	33%	50%
2	w	30%	40%	30%
3	w	45%	40%	15%
4	r	26%	47%	26%
5	r	13%	47%	40%
6	r	6%	42%	53%
7	r	2%	34%	64%
8	w	5%	49%	46%
9	r	2%	40%	57%
10	r	1%	32%	68%

<- Laplace-Wahrschein-lichkeit

wird

Vertrauen

Findet heraus, wie Bays das macht: von Zeile zu Zeile

Sechsfeldertafel

	A: ●○○○	B: ●●○○	C: ●●●○	
a-priori	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
r	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{12}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$
w	$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{12}$	$\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{4}=\frac{4}{24}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{6}{12}$

Mischungsrechnung

$\frac{1}{3}$ A: ●○○○ — $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}$ B: ●●○○ — $\frac{2}{4}$

$\frac{1}{3}$ C: ●●●○ — $\frac{3}{4}$

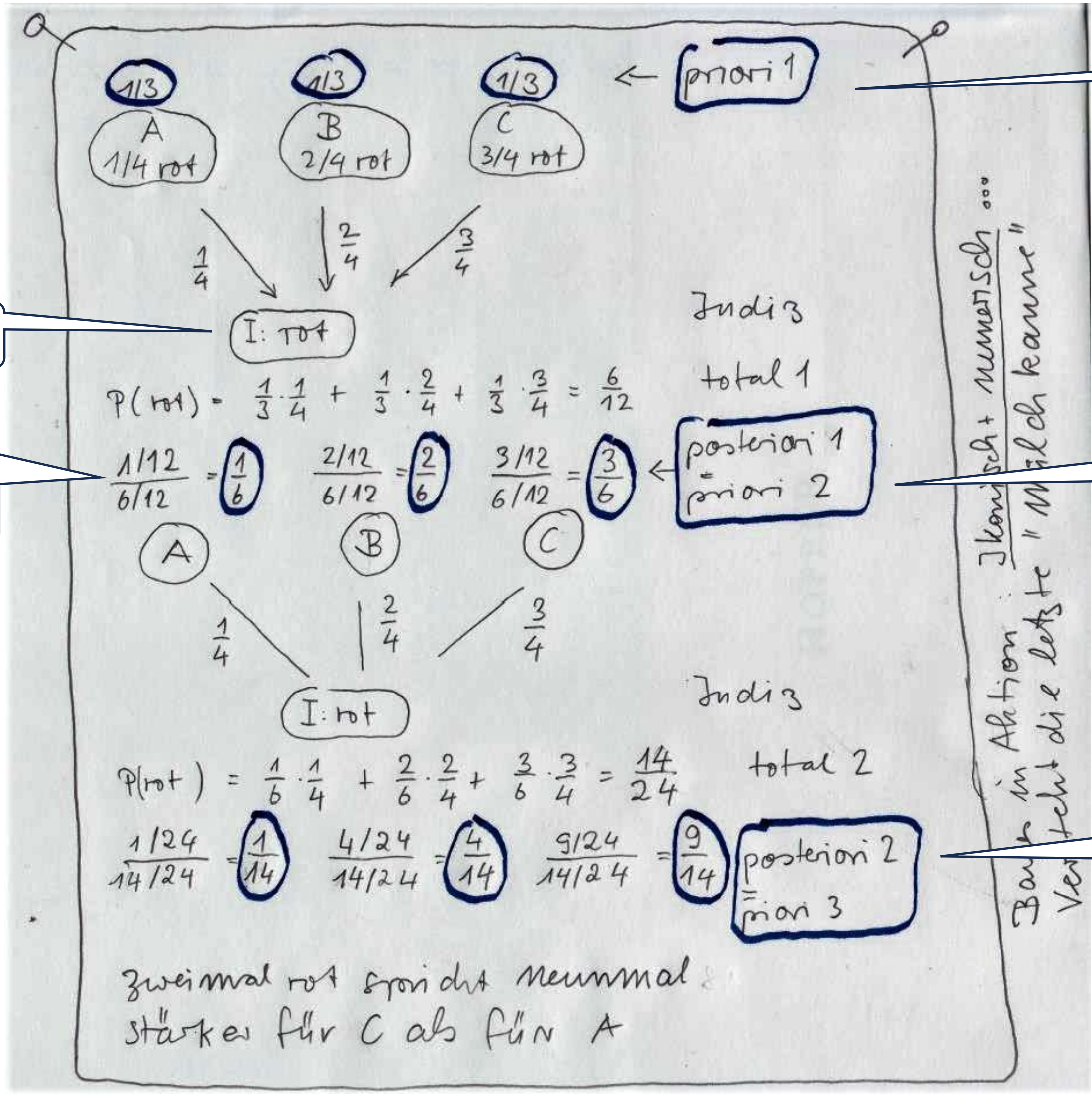
Indiz „r“: $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{12}:\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ $\quad$ $\frac{2}{12}:\frac{1}{2}=\frac{2}{6}$ $\quad$ $\frac{3}{12}:\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$

Natürliche Häufigkeiten

A: ●○○○	B: ●●○○	C: ●●●○

Hintereinanderschalten Invertierter Baumdiagramme beschreibt Lernen aus Erfahrung



Laplace

aus Erfahrung

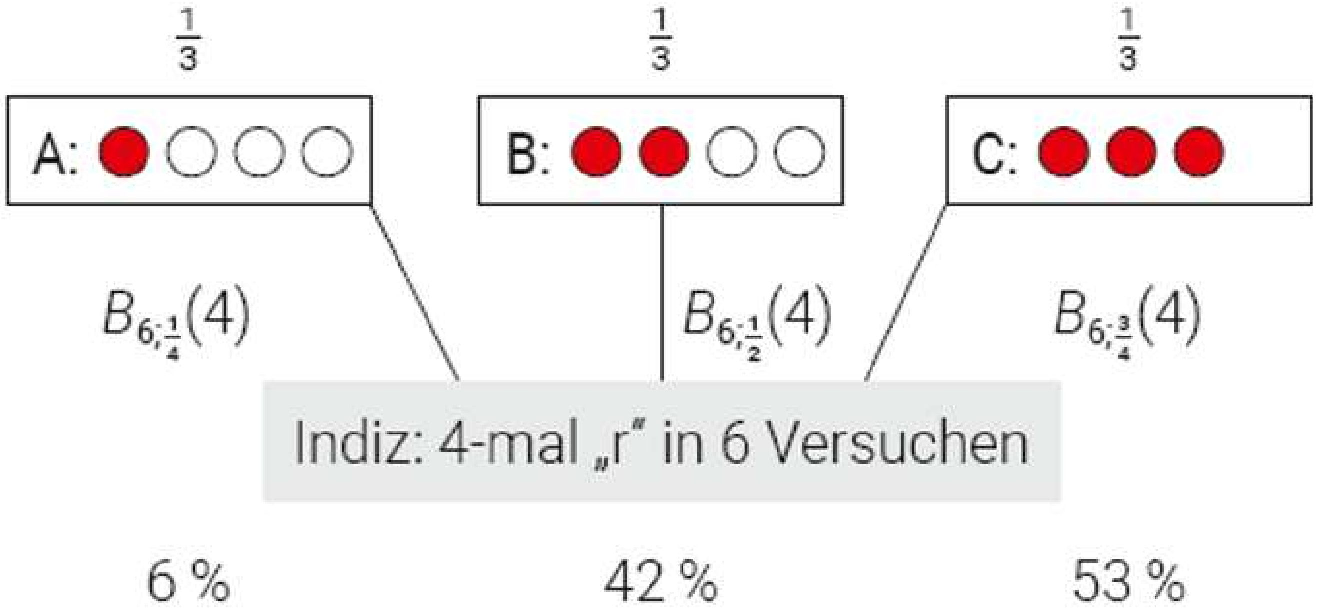
Aus Laplace wurde Bauchgefühl

wurde neue Erwartung

Aus Bauchgefühl wurde revidiertes Bauchgefühl

In einem Schritt mit Binomialverteilung

oder nur mit Pfadregel ohne $\binom{6}{4}$



1996 in NRW, als Mathe noch nicht kompetenzorientiert war

Beispiel 1

Welche a posteriori Wahrscheinlichkeiten ergeben sich bei Experiment 3 für die Farbkomb nationen ss, sw, ww, wenn der Chip, den Helge zufällig gezogen hat, in zwei Würfen beid Mal „weiß" zeigt?

Lösung 1:

Verwende die Regel von Bayes zweimal nacheinander, wobei die a posteriori Wahrscheinlichkeiten nach dem ersten Schritt die a priori Wahrscheinlichkeiten des zweiten Schrittes sind.

erster Schritt

Wahrscheinlichkeiten der Pfade zum Indiz:

über ss: $\frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{0}{12}$

über sw: $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{12}$

über ww: $\frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{4}{12}$

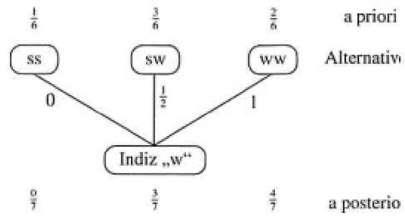
Summe: $\frac{7}{12}$

a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

Alternative ss: $\frac{0}{12} : \frac{7}{12} = \frac{0}{7}$

Alternative sw: $\frac{3}{12} : \frac{7}{12} = \frac{3}{7}$

Alternative ww: $\frac{4}{12} : \frac{7}{12} = \frac{4}{7}$



Bayes-Diagramm, einstufiges Indiz

Fig

zweiter Schritt

Wahrscheinlichkeiten der Pfade zum Indiz:

über ss: $\frac{0}{7} \cdot 0 = \frac{0}{14}$

über sw: $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$

über ww: $\frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{8}{14}$

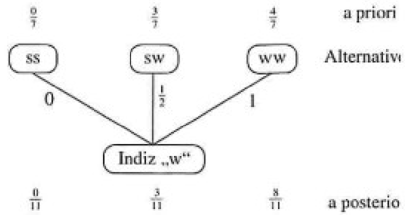
Summe: $\frac{11}{14}$

a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

Alternative ss: $\frac{0}{14} : \frac{11}{14} = \frac{0}{11}$

Alternative sw: $\frac{3}{14} : \frac{11}{14} = \frac{3}{11}$

Alternative ww: $\frac{8}{14} : \frac{11}{14} = \frac{8}{11}$



Bayes-Diagramm, einstufiges Indiz

Fig

beide Schritte auf einmal

Lösung 2:

Betrachte „ww" als zweistufiges Indiz.

Wahrscheinlichkeiten der Pfade zum Indiz:

über ss: $\frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$

über sw: $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{24}$

über ww: $\frac{2}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8}{24}$

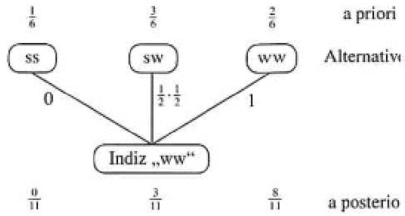
Summe: $\frac{11}{24}$

a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

für ss: $0 : \frac{11}{24} = 0$

für sw: $\frac{3}{24} : \frac{11}{24} = \frac{3}{11}$

für ww: $\frac{8}{24} : \frac{11}{24} = \frac{8}{11}$



Bayes-Diagramm, zweistufiges Indiz

Fig

Durch Beobachtung des Indizes „ww" haben sich die Wahrscheinlichkeiten der Alternative von $\frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$ bzw. $\frac{3}{6} = 50\,\%$ bzw. $\frac{2}{6} \approx 33{,}3\,\%$ verändert zu: 0 bzw. $\frac{3}{11} \approx 27{,}3\,\%$ bzw. $\frac{8}{11} \approx 72{,}7\,\%$.

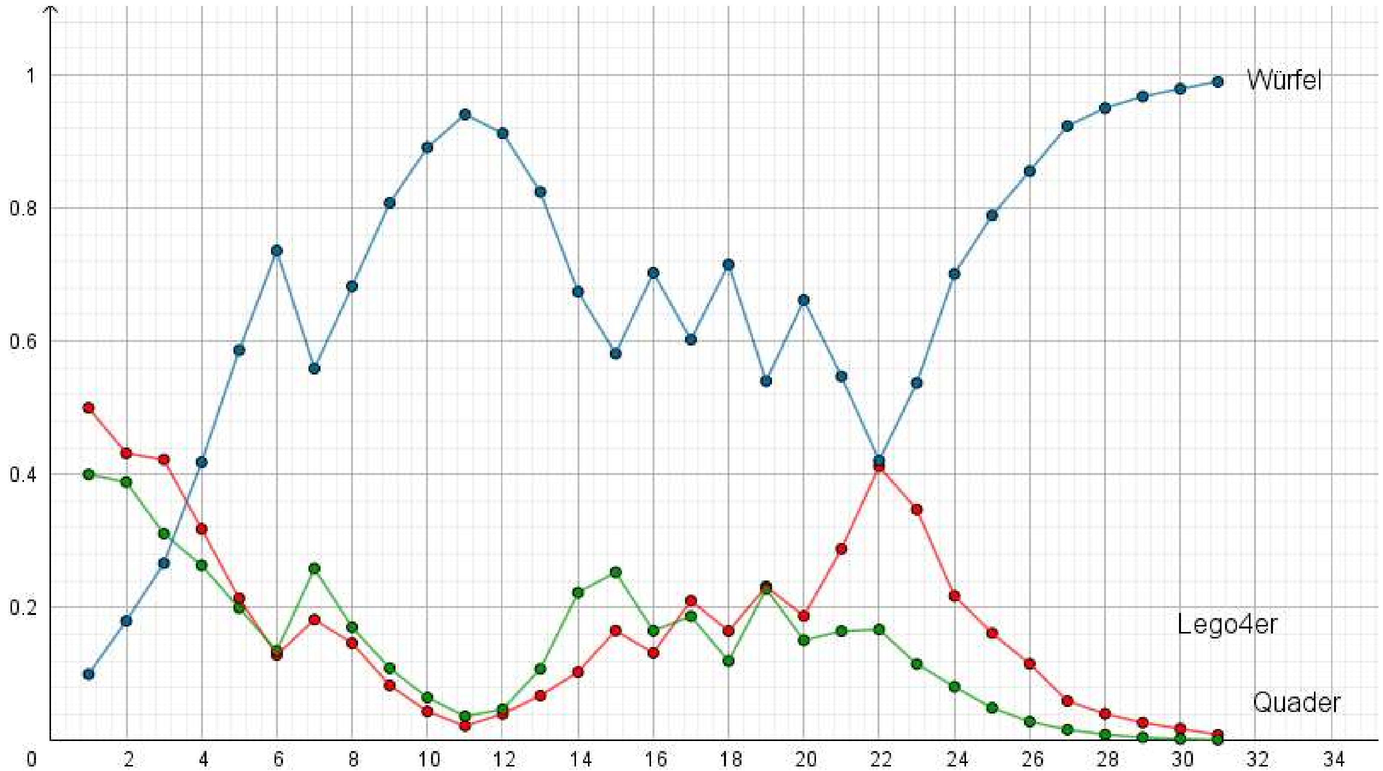
Veränderung des Vertrauens in zufallsabhängige nicht-Laplace Modelle

W: 10 %

Q: 50 %

L: 40 %

$$|\Omega| = 3 \cdot 6^{31}$$

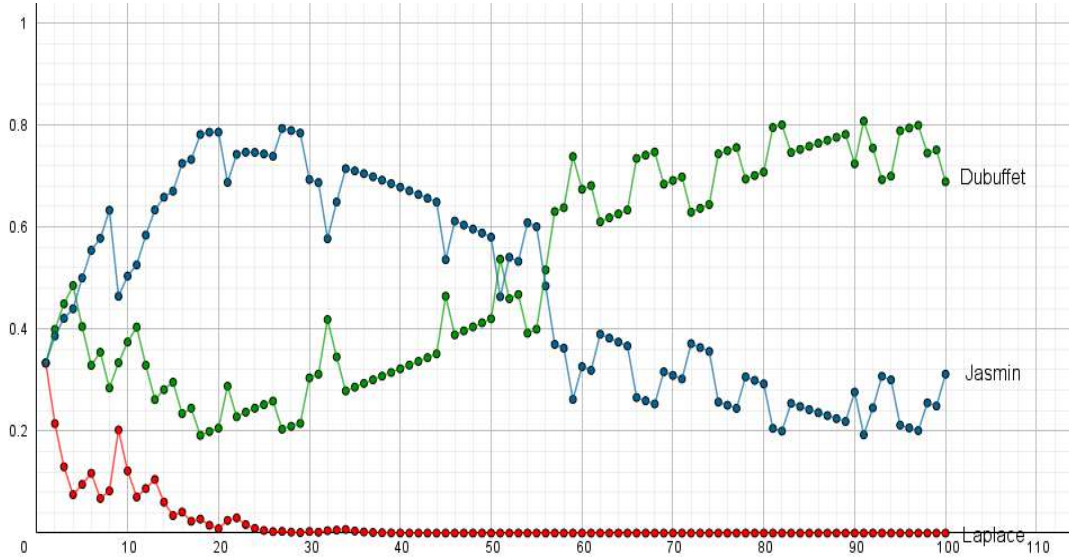


	A	B	C	D
1	Indiz	Würfel	Quader	Lego4er
2	1	0.167	0.11	0.09
3	2	0.167	0.08	0.09
4	3	0.167	0.31	0.42
5	4	0.167	0.31	0.22
6	5	0.167	0.08	0.09
7	6	0.167	0.11	0.09
8		1	1	1
9	priori	0.1	0.5	0.4
10				
11	posteriori	0.99	0.009	0.002

- Abstract
- Standpunkt
- Drei Kopfsprünge
- Bayes …
- stolpert über Ω …
  fängt das Permanenzprinzip ihn auf (?)
- Resümee

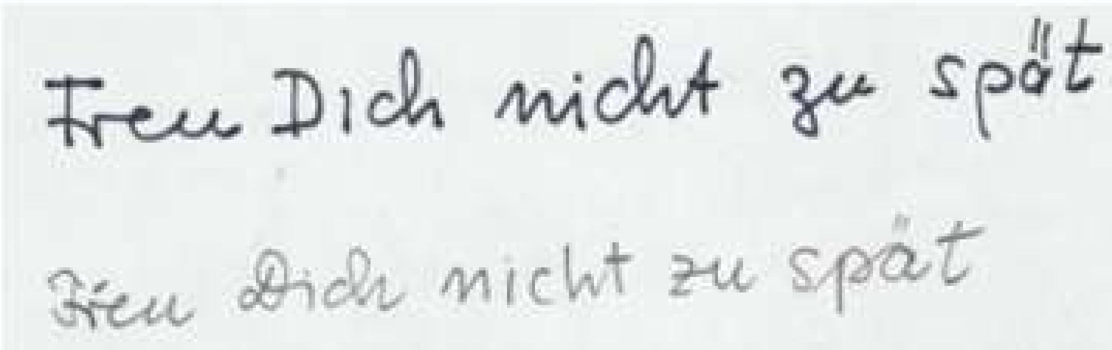
Permanenzprinzip ist, wenn die Modelle nicht mehr zufallsabhängig sind, einem das aber egal ist … und man Vertrauen in Modelle mit deren Wahrscheinlichkeiten vermixend locker so weiterrechnet wie bisher…

	Jasmin	Laplace	Dubuffet
1	0.15	0.167	0.11
2	0.05	0.167	0.08
3	0.3	0.167	0.31
4	0.3	0.167	0.31
5	0.05	0.167	0.08
6	0.15	0.167	0.11



Das passendste der vorab hineingegebenen Modelle gewinnt
Aber man muss es vorher reingeben ….
Oder im Laufe des Datensammelns hineinschmuggeln.
Trainieren von Modellen nennt man das …

Nenne mir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die
beiden Zeilen von der gleichen Person geschrieben wurden.

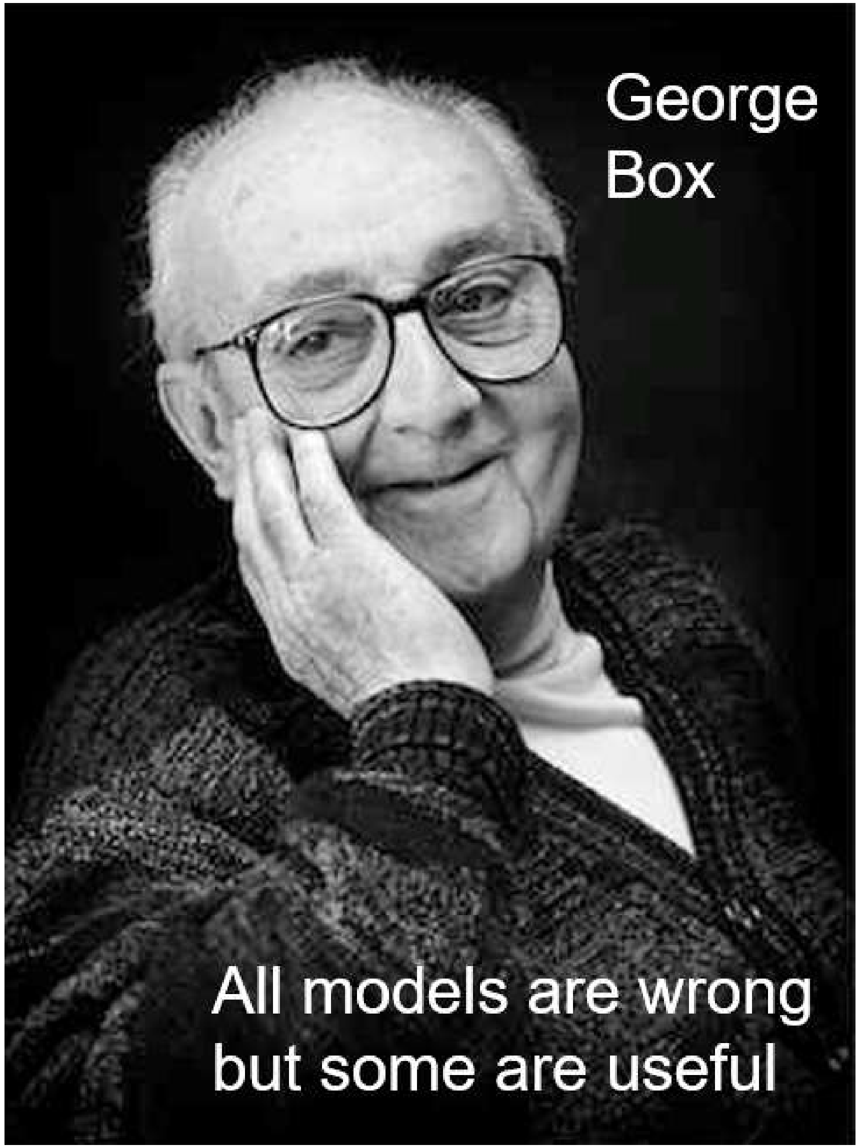


Die Wahrscheinlichkeit beträgt zwischen 85 und 95 %
Die 90% sind eine Bayessche posteriori probability,
also ein Maß für den aktuellen Wissensstand,
nicht eine empirisch messbare Häufigkeit

- Abstract
- Standpunkt
- Drei Kopfsprünge
- Bayes …
- stolpert über Ω …
  fängt das Permanenzprinzip ihn auf (?)
- Resümee

Das nehmen Sie mit:

- Schenke Kindern Probleme, nicht Lösungen
- Nutze Dreisatz Spekulieren -Experimentieren -Reflektieren
- Führe Begriffe nicht ein, lass sie Kinder erleben!
- Deute Wahrscheinlichkeit als unsicheres Modell ->
- Die Frage, ob (mit welcher Wk.) eine Hypothese gilt, wird als sinnlos erlebt! Alle sind falsch!
- Testgrößen helfen Modellgüte zu beurteilen.
- Einseitige Tests haben dagegen nur das Ziel den Nutzen einer Entscheidung zu maximieren.
- Sammle vertrauenswürdige Modelle im Konfidenzintervall wie Maike und Reimund



Eigentlich ist es egal, ob Wahrscheinlichkeiten unabhängig von uns existieren oder nicht, weil man sie irgendwie festlegen muss, wenn man mit ihnen rechnen/prognostizieren möchte.