

Modellieren im Stochastikunterricht unter Einbeziehung realer Daten **(und realistischer Situationen : Möglichkeiten und Grenzen**

Rolf Biehler, Universität Paderborn

Vortrag KIT Karlsruhe, 5. Karlsruher Didaktik-Workshop, 19.2.2026



Modellieren im Stochastikunterricht unter Einbeziehung realer Daten **(und realistischer Situationen : Möglichkeiten und Grenzen**

Featuring: ChatGPT als didaktisch-fachliche Assistenz

Rolf Biehler, Universität Paderborn

Vortrag KIT Karlsruhe, 5. Karlsruher Didaktik-Workshop, 19.2.2026



Gliederung

- 1. Einige kurze Beispiele für modellierungsbewusstes Arbeiten aus ml 232**
 1. Übersicht
 2. Geburtsgewichte: Normalverteilt?
- 2. Implizite Annahmen: Wir drehen Glücksräder**
- 3. Bernoullikette und Binomialverteilung als Modell**
 1. Einführung
 2. ChatGPT entwickelt problematische Aufgaben
 3. Dirk Nowitzki macht in „NRW 2008 Abitur“
 4. Flugüberbuchungsaufgaben
 5. Geschlechterverteilung in Familien binomialverteilt?
- 4. $1/\sqrt{n}$ -Gesetz und reale Daten**

Kindergeburten in NRW



1. Einige kurze Beispiele für modellierungsbewusstes Arbeiten aus ml 232



Herausforderungen bei der Konzipierung von Aufgaben

Implizite Annahmen vermeiden

- Gleichverteilung
- Stochastische Unabhängigkeit
- Konstanz der Wahrscheinlichkeit
- Wert der relativen Häufigkeit ist identisch zur Wahrscheinlichkeit
- Stichprobe erfolgt als Zufallsstichprobe, ohne
 - klare Population
 - ob Ziehen mit oder ohne Zurücklegen
 - Bedingungen zu praktischer Realisierung



Hrsg: Rolf Biehler & Birgit Griese

Modellierungsbewusste Stochastikaufgaben

Herausforderungen bei der Konzipierung von Aufgaben

Authentische Kontexte wählen

- Annahmen gelten mindestens näherungsweise
- Idealisierung bewusst machen
- Die Fragestellungen machen auch im Kontext Sinn



Hrsg: Rolf Biehler & Birgit Griese

Modellierungsbewusste Stochastikaufgaben

mathematik lehren 232 | 2022

Sinnvoll stochastisch Modellieren

BASISARTIKEL

ROLF BIEHLER, BIRGIT GRIESE

Modellieren im Stochastikunterricht 2

Annahmen hinterfragen, Ergebnisse validieren

Unterrichtspraxis

KARL CHARON

6. Schuljahr **Wenn der Würfel fehlt** 7

Auf der Suche nach einem Ersatzwürfel

RALF NIESZPOREK, BIRGIT GRIESE

7./8. Schuljahr **Fairer oder unfairer Würfel?** 9

Eine elementare Modellbewertung

BIRGIT GRIESE, INA WILHELM

ab 7. Schuljahr **Grüne Welle – was geht?** 13

Idealisierte Ampelszenarien untersuchen

THERESA BÜCHTER, ANDREAS EICHLER, MARKUS VOGEL

ab 9. Schuljahr **Ein sich ständig wandelndes Modell in unsicheren Zeiten** 19

Covid-19 und Bayes visualisiert im Einheitsquadrat

KARIN BINDER, WERNER BLUM, STEFAN KRAUSS

9./10. Schuljahr **Gesichtserkennung** 23

Wie verlässlich sind die Ergebnisse?



Hrsg: Rolf Biehler & Birgit Griese

Modellierungsbewusste Stochastikaufgaben

	SASKIA SCHREITER, MARKUS VOGEL, ANDREAS EICHLER	
ab 9. Schuljahr	Echt schräg: Galton revisited	28
	Experimentieren mit dem Galton-Brett in Schräglage	
	ANDREAS PRÖMME, REIMUND VEHLING	
ab 7. Schuljahr	„Die Differenz 5 kommt ja nur einmal vor!“	32
	Eine stochastische Entdeckungsreise beim Spiel „Differenz trifft“	
	SUSANNE PODWORN	
ab 10. Schuljahr	Vokabeln lernen im Schlaf?	36
	Statistische Testprozeduren verstehen	
	ROLF BIEHLER, HUBERT LANGLOTZ, WILFRIED ZAPPE	
ab 11. Schuljahr	Alles normal?!	41
	Daten auf Normalverteilung prüfen – mit schulischen Mitteln	



Hrsg: Rolf Biehler & Birgit Griese

Alles normal?!

Daten auf Normalverteilung prüfen – mit schulischen Mitteln

finden. Die Daten von mehr als 2000 Neugeborenen wurden von 2014 bis 2020 öffentlich zugänglichen Anzeigen aus Tageszeitungen (im Wesentlichen „Freies Wort“, Ausgabe Ilm-Kreis und „Thüringer Allgemeine“, Ausgabe Arnstadt-Ilmenau) entnommen und für unsere Zwecke anonymisiert (vgl. **Abb. 1**). Man weiß nicht genau, welche Personenkreise Tageszeitungen für Geburtsanzeigen nutzen. Wir können uns aber nicht vorstellen, dass deswegen eine systematische Verfälschung von Geburtsgewicht/-größe vorliegen könnte.

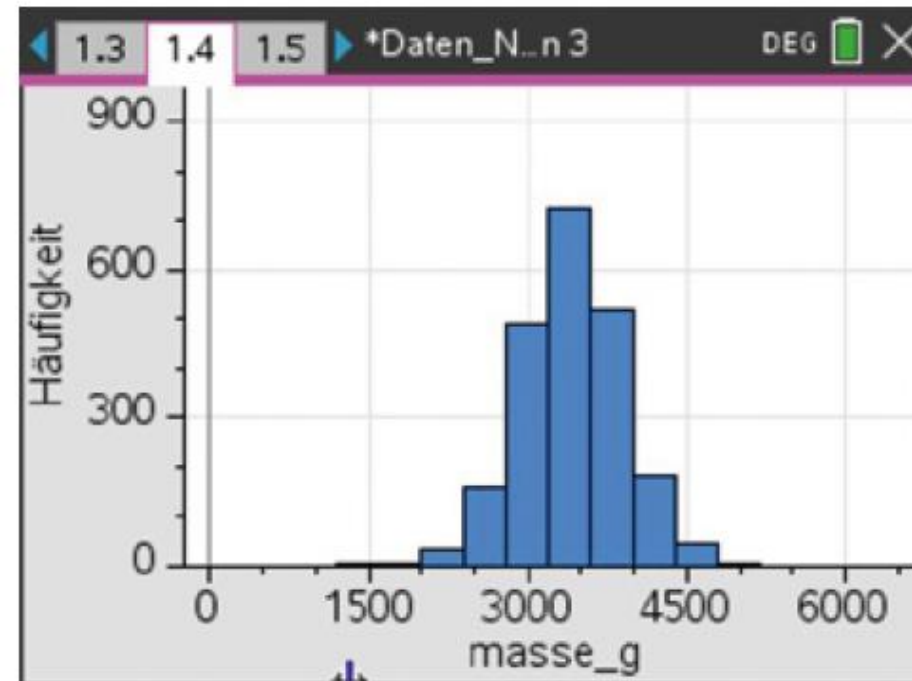


Abb. 2: Histogramm mit absoluten Häufigkeiten von Gewicht, Klassenbreite 400

Alles normal?!

Daten auf Normalverteilung prüfen – mit schulischen Mitteln

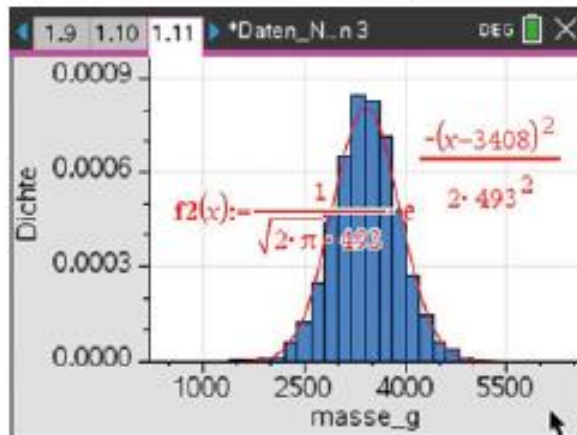
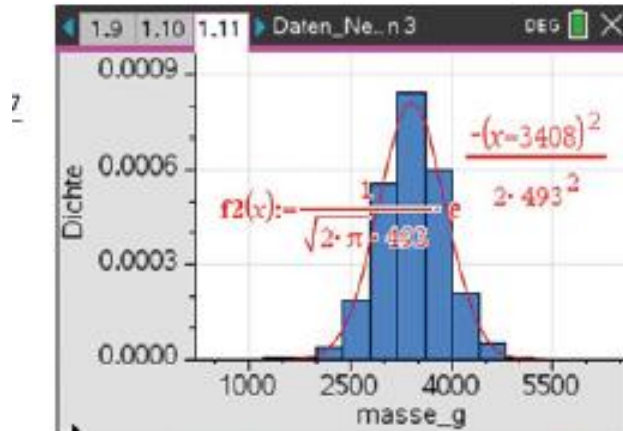


Abb. 5: Dichtehistogramme des Merkmals masse bei eingezeichneter Normalverteilung (Klassenbreite 400 (oben), und 200 (unten))

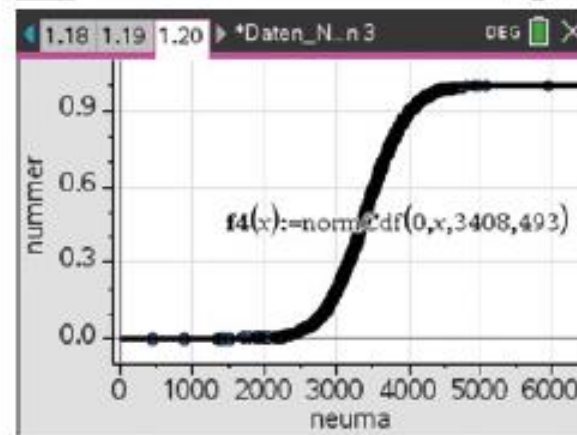
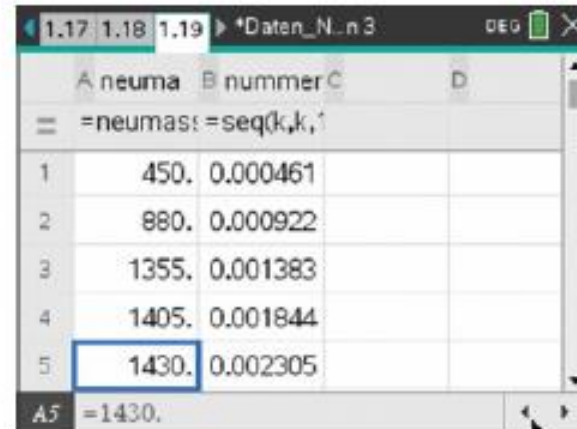


Abb. 7: Kumulative relative Häufigkeit (nr.) für die der Größe nach sortierten masse -Daten (neuma) mit eingezeichneter kumulativer

Alles normal?!

Daten auf Normalverteilung prüfen – mit schulischen Mitteln

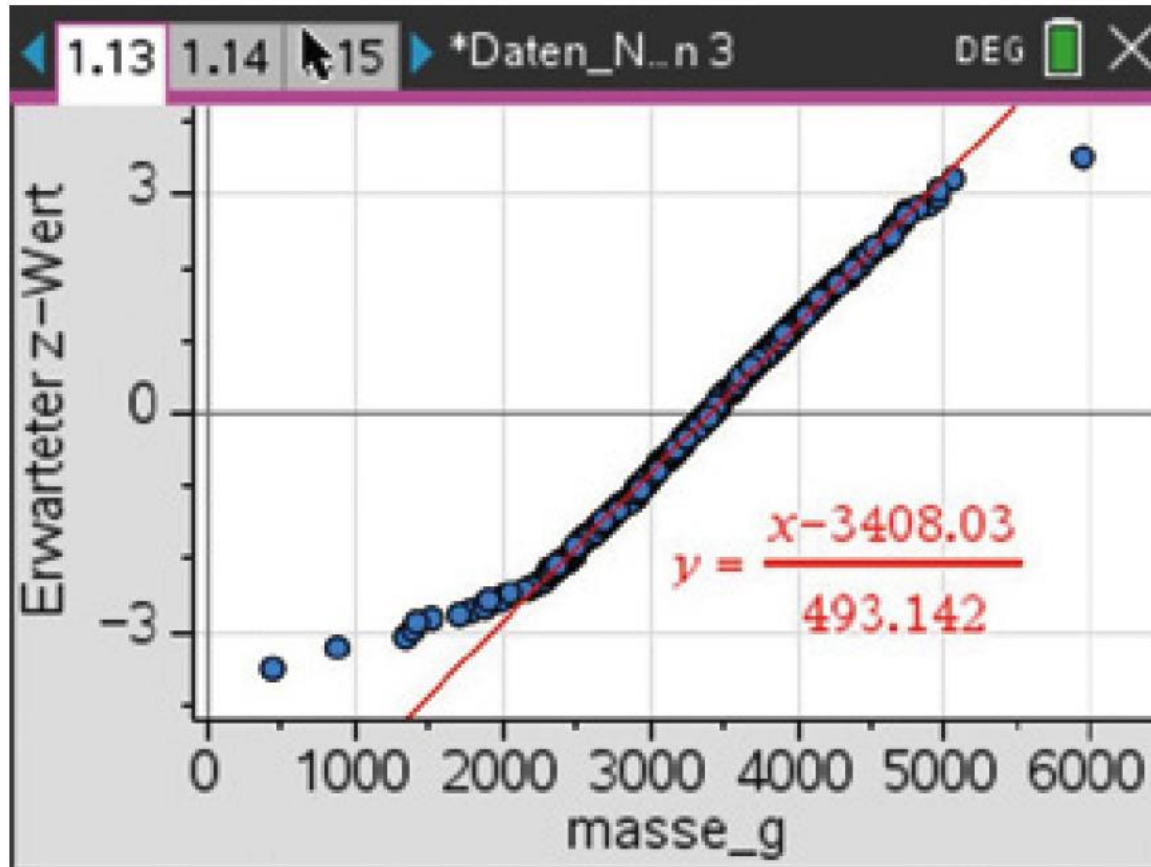


Abb. 8: Normalquantildiagramm für die masse Daten

The greatest value of a picture is when it *forces* us to notice what we never expected to see.

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Addison-Wesley. p. vi.

„Explorative Funktion von Grafiken“

siehe

Biehler, R. (1985). Graphische Darstellungen. *mathematica didactica*, 8, 57–81.

https://www.researchgate.net/publication/257926810_Graphische_Darstellungen

$$F_{\mu,\sigma}(x) = F_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \text{ denn}$$

$$\begin{aligned} P(X_{\mu,\sigma} \leq x) &= P(\mu + \sigma \cdot X_{0,1} \leq x) \\ &= P\left(X_{0,1} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= F_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Die Quantilfunktion $Q_{0,1}$ der Standardnormalverteilung ist die Umkehrfunktion von $F_{0,1}$, d. h.

$$\begin{aligned} Q_{0,1}(F_{\mu,\sigma}(x)) &= Q_{0,1}\left(F_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= \frac{x-\mu}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sigma} \cdot x - \frac{\mu}{\sigma}. \end{aligned}$$

Wenn man die Daten und die Funktion im Perzentildiagramm mit der Funktion $Q_{0,1}$ transformiert, wird die Funktion zu einer Geraden mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{\sigma} \cdot x - \frac{\mu}{\sigma}.$$

Sind die Daten normalverteilt müssen sie im transformierten Diagramm idealerweise auf dieser Geraden liegen. Das Normalquantil-Diagramm entsteht, indem diese Transformation mit den Daten im Perzentildiagramm vorgenommen wird. Zugleich wird in die Daten die Gerade

$$y = \frac{1}{s} \cdot x - \frac{m}{s}$$

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C., & Prömmel, A. (2006). *Fathom 2 : Eine Einführung*. Springer. S. 202



2. Implizite Annahmen: Wir drehen ein Glücksrad



Aufgabe: Ein Glücksrad (mit zwei Sektoren grün (30%) rot (70%)) wird 10mal gedreht: Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal grün kommt.

RB an ChatGPT: Was sind die impliziten Annahmen?

Chat GPT: Gute Frage! Bei der Aufgabe mit dem Glücksrad und der Berechnung mithilfe der **Binomialverteilung** werden mehrere **implizite (nicht ausdrücklich genannte) Annahmen** gemacht. Hier sind die wichtigsten:

Implizite Annahmen (Umformulierung RB)

- Wahrscheinlichkeit für grün ist 30%, für rot ist 70% (bei jedem Versuch)
- Drehungen erfolgen stochastisch unabhängig

Aufgabe: Ein Glücksrad (mit zwei Sektoren grün (30%) rot (70%)) wird 10mal gedreht: Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal grün kommt.

ChatGPT:  **Hinweis:**

Diese Annahmen sind oft in Schul- und Übungsaufgaben selbstverständlich, sollten aber bei realen Experimenten stets kritisch geprüft werden (z. B. könnte das Rad einen Produktionsfehler haben oder ein Spieler beeinflusst das Ergebnis).

Möchtest du ein Beispiel, wo diese Annahmen in der Praxis verletzt würden?

ChatGPT: Möchtest du ein Beispiel, wo diese Annahmen in der Praxis verletzt würden? RB Ja gerne!



1. Verletzung der Unabhängigkeit:

Beispiel:

Ein Spieler dreht das Glücksrad 10-mal und **merkt sich, wie er es dreht** (z. B. immer mit gleicher Kraft und Richtung). Dadurch entsteht ein **Muster**, das die Wahrscheinlichkeiten verändert – z. B. landet es häufiger auf der gleichen Farbe.

👉 **Folge:** Die Ergebnisse sind **nicht unabhängig**, da frühere Drehungen spätere beeinflussen können.

ChatGPT: Möchtest du ein Beispiel, wo diese Annahmen in der Praxis verletzt würden?



2. Verletzung der konstanten Wahrscheinlichkeit:

Beispiel:

Das Glücksrad ist **mechanisch nicht perfekt ausbalanciert**, oder es wird **zwischenzeitlich beschädigt**. Anfangs ist die Grün-Wahrscheinlichkeit 30 %, später aber (unbemerkt) nur noch 20 %.

👉 **Folge:** Die Bedingung „gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit bei jedem Versuch“ ist **nicht erfüllt**.

ChatGPT: Möchtest du ein Beispiel, wo diese Annahmen in der Praxis verletzt würden?



3. Mehr als zwei mögliche Ergebnisse:

Beispiel:

Das Glücksrad hat neben „grün“ (30 %) und „rot“ (70 %) auch ein kleines Feld „Sondergewinn“ (z. B. 5 %) – was in der Aufgabe nicht erwähnt wurde.

👉 **Folge:** Das zugrunde liegende Experiment hat **mehr als zwei Ausgänge**, also **kein binäres Ergebnis** → **nicht binomial**.

RB: Ist natürlich problematisches Beispiel!

ChatGPT: Möchtest du ein Beispiel, wo diese Annahmen in der Praxis verletzt würden?



4. Wahrscheinlichkeiten sind nur geschätzt, nicht exakt:

Beispiel:

„30 % grün“ basiert auf einer früheren Stichprobe von 10 Drehs – in Wirklichkeit ist die Wahrscheinlichkeit zufällig und könnte schwanken.

👉 **Folge:** Die **mathematische Modellannahme** $p = 0,3$ ist **unsicher oder falsch**.

ChatGPT: Möchtest du ein Beispiel, wo diese Annahmen in der Praxis verletzt würden?



5. Spieler ändert bewusst seine Strategie:

Beispiel:

Der Spieler dreht die ersten 5 Male stark, die letzten 5 Male ganz leicht – und je nach Drehrichtung ändern sich die Chancen auf grün/rot.

👉 **Folge:** Die Bedingung „gleicher Versuch unter gleichen Bedingungen“ ist **nicht erfüllt**.

RB Bitte formuliere die Aufgabe neu, so dass alle impliziten Annahmen expliziert sind und durch reale Bedingungen gestützt werden

Ein Unternehmen testet ein neu entwickeltes Glücksrad, das zur Kundenbindung eingesetzt werden soll. Es besteht aus zwei gleichmäßig geformten Sektoren:

30 % der Fläche ist grün,

70 % der Fläche ist rot.

Das Glücksrad wurde von unabhängigen Technikern geprüft. **Mechanik und Gewichtung wurden so justiert, dass jeder Dreh unabhängig vom vorherigen erfolgt** und die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Dreh konstant bleiben. Der Versuchsaufbau wird **in einem Labor** unter kontrollierten Bedingungen durchgeführt, um externe Einflüsse (z. B. Luftzug, wechselnde Drehrichtungen) zu vermeiden.

Bitte formuliere die Aufgabe neu (Fortsetzung)

In einem Testlauf wird das Glücksrad **10-mal hintereinander vom gleichen Motor mit gleichbleibender Kraft und Richtung gedreht**. Dabei gelten folgende Bedingungen:

- **Jeder Dreh ist unabhängig** vom vorherigen.
- **Die Wahrscheinlichkeit für „grün“ beträgt bei jedem Dreh genau 30 %** (gemäß Herstellerangabe und Labormessung).
- **Nur zwei Ergebnisse sind möglich:** „grün“ oder „rot“. Sonderfelder sind nicht vorhanden.

Fragestellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei den 10 Drehungen **genau 2-mal grün** erscheint.

RB: „aus zwei gleichmäßig geformten Sektoren“ ist ungenau




Überarbeitete Aufgabe: Glücksrad-Experiment unter präzise kontrollierten Bedingungen

Ein Unternehmen testet ein Glücksrad, das für Werbezwecke eingesetzt werden soll. Das Rad ist eine perfekte Kreisfläche, die **genau in zwei Sektoren aufgeteilt** ist:

- Ein **108°-Sektor ist grün gefärbt** (das entspricht 30 % der vollen Kreisfläche),
- Ein **252°-Sektor ist rot gefärbt** (entspricht 70 %).

Das Glücksrad ist präzise gelagert und wird von einem **kalibrierten Elektromotor mit konstanter Drehkraft und zufälliger Startposition** gedreht.

Wenn man einen solchen Motor nimmt, ist dann nicht das Ergebnis deterministisch immer gleich, wenn man von gleicher Anfangsstellung ausgeht?

 **Ja – absolut!**

Wenn:

- die **Startposition immer gleich** ist,
- der **Motor immer exakt gleich dreht**,
- und es **keine äußeren Störungen** (z. B. Luftreibung, Unebenheiten, zufällige Vibrationen) gibt, ist das Ergebnis **vollständig deterministisch** – d. h., **immer gleich**.

Das bedeutet:

Ein motorisiertes Glücksrad ohne zufällige Startbedingung oder Variabilität produziert keine Zufallseignisse, sondern ist ein mechanisch reproduzierbarer Vorgang.

RB: Wie realisiere ich die zufällige Anfangsstellung?

a) Manuelle Vorrotation:

- Vor jedem Motorstart wird das Rad **per Zufall (z. B. manuell oder per kurzem Ruck)** angestoßen, sodass die **Startposition unterschiedlich** ist.
- Dies kann z. B. durch ein lose drehbares Lager mit geringer Reibung und kurze Vorrotation realisiert werden.

b) Zufallsgesteuerter Elektromotor:

- Der Motor dreht das Rad zunächst **eine variable Anzahl von Umdrehungen (z. B. 3–10 Umdrehungen)**, wobei die genaue Zahl und Geschwindigkeit per Zufallsgenerator gesteuert wird.
- Danach lässt man das Rad frei auslaufen – **die Ruhelage ist dann zufallsbedingt**, auch bei identischer Mechanik.

c) Start aus zufälliger Position durch mechanischen „Zufallswurf“:

- Das Rad wird **nicht vom Motor**, sondern z. B. durch ein Fallgewicht oder ein zurückschnappendes Gummiband in Drehung versetzt, bei dem **der Winkel zufällig ist** (vergleichbar mit einem Roulettekessel).

Muss man nicht durch Experimente prüfen, ob die Modellannahmen zutreffen. Wie macht man das?

Ja – **absolut richtig!**

1. Prüfung der Erfolgswahrscheinlichkeit (z. B. $p = 0,3$ für grün)

◆ Vorgehen:

- Man führt **eine größere Anzahl an Drehungen** unter den vorgesehenen Bedingungen durch (z. B. 100 oder mehr).
- Man zählt, wie oft das Ergebnis „grün“ eintritt.
- Dann vergleicht man den **relativen Anteil** mit der theoretischen Wahrscheinlichkeit von 30 %.

◆ Statistischer Test (optional):

- Mit einem **Binomial-Test** oder **Chi-Quadrat-Test** kann man prüfen, ob die beobachteten Häufigkeiten **signifikant** von der erwarteten Verteilung abweichen.

Muss man nicht durch Experimente prüfen, ob die Modellannahmen zutreffen. Wie macht man das? Fortsetzung

Ja – **absolut richtig!**

2. Prüfung der Unabhängigkeit der Versuche

◆ Vorgehen:

- Man analysiert die Ergebnisse auf **Muster** oder **Abhängigkeiten** zwischen aufeinanderfolgenden Drehungen.
- Beispiel: Wenn nach einem grünen Feld besonders oft wieder ein grünes Feld kommt, könnte das auf eine **Abhängigkeit** hinweisen.

◆ Statistischer Test:

- Man verwendet einen **Runs-Test (Test auf Zufälligkeit)** oder korrelationsbasierte Verfahren, um Abhängigkeiten aufzudecken.

**RB Du schlägst vor: "Dann vergleicht man den relativen Anteil mit der theoretischen Wahrscheinlichkeit von 30 %."
Wie kann man das sinnvoll elementar ohne Test machen.**

Sehr gute Nachfrage – und genau das ist im schulischen oder einführenden Kontext besonders wichtig: **Wie vergleicht man beobachtete und erwartete Wahrscheinlichkeiten sinnvoll, ohne formale Tests wie Binomialtest oder Chi-Quadrat?**

Hier ist ein **elementarer, verständlicher Weg**, der sich z. B. für Schule oder Grundstudium eignet:

Ohne formale Tests kann man **eine einfache Faustregel** anwenden:

In unserem Beispiel mit 100 Versuchen und 32 % liegt der Wert **innerhalb des Toleranzbereichs (25 % – 35 %) → Plausibel.**

Stichprobengröße	Toleranzbereich um $p = 0,30$ (Faustregel)
50 Versuche	$\pm 10\% \rightarrow (0,20 \text{ bis } 0,40)$
100 Versuche	$\pm 5\% \rightarrow (0,25 \text{ bis } 0,35)$
500 Versuche	$\pm 2\% \rightarrow (0,28 \text{ bis } 0,32)$

Warum funktioniert das?

Je größer die Stichprobe, desto kleiner darf die Abweichung sein, bevor man sie für „unplausibel“ hält – das ist die Grundidee **ohne formalen Hypothesentest**, aber **mit gesundem statistischem Denken.**

Herleitung (vereinfacht):

Wenn man ein Zufallsexperiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und n Versuchen hat, ist die Streuung durch die **Standardabweichung σ** der **Binomialverteilung** gegeben:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

✓ Vereinfachte Faustregel (für Unterricht oder Alltag):

n	Typischer Toleranzbereich für $p = 0,3$ ($\approx \pm 1\sigma$)
50	30% \pm 7% ($\approx 23\% - 37\%$)
100	30% \pm 5% ($\approx 25\% - 35\%$)
500	30% \pm 2% ($\approx 28\% - 32\%$)

📊 Faustregel-Tabelle für $p = 0,3$ mit $\pm 2\sigma$ -Toleranz:

Stichprobengröße n	Erwartungswert μ	σ (gerundet)	Toleranzbereich ($\pm 2\sigma$)	Relative Häufigkeit
50	15	3,23	(8,5 – 21,5)	(0,17 – 0,43)
100	30	4,58	(21 – 39)	(0,21 – 0,39)
200	60	6,48	(47 – 73)	(0,235 – 0,365)
500	150	10,25	(130 – 170)	(0,26 – 0,34)

Realer Kontext für Glücksräder: Roulette im Casino

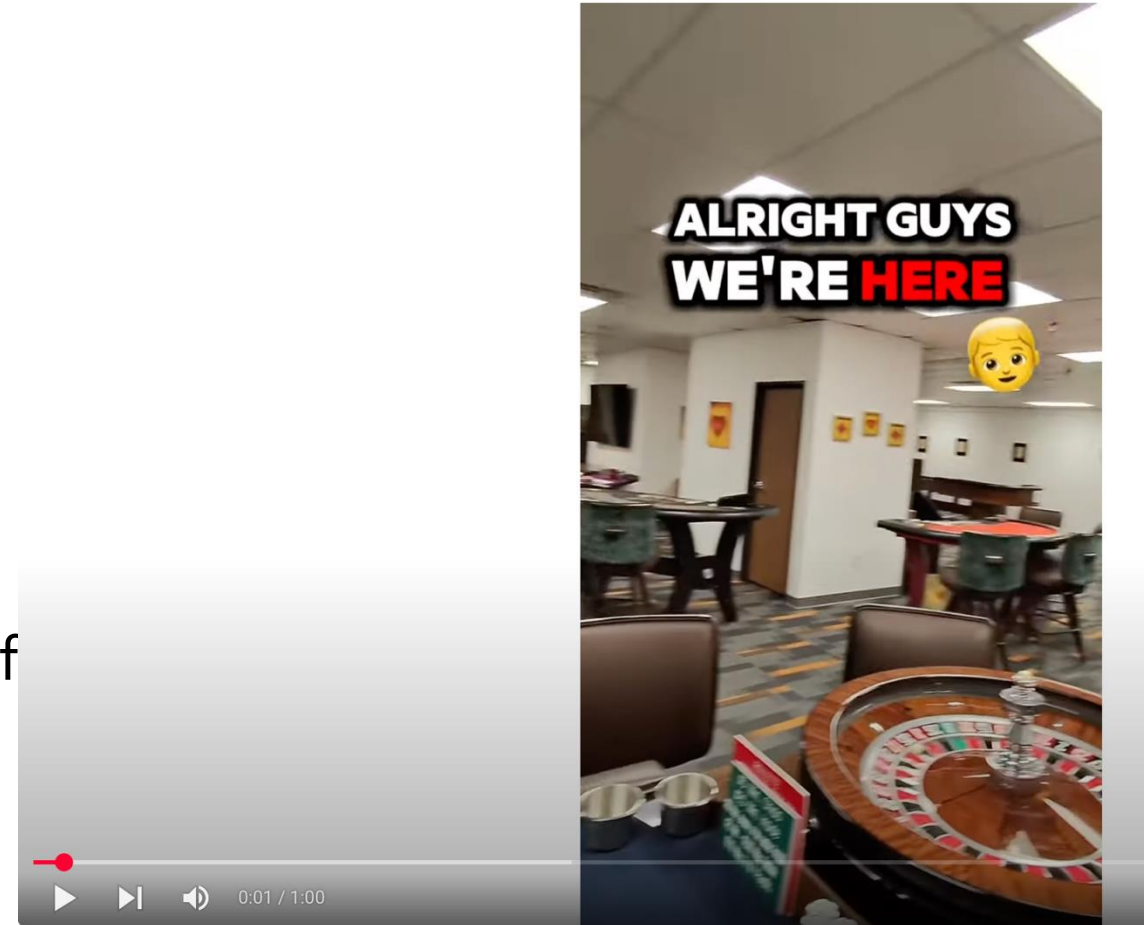
Regeln für die Herstellung der stochastischen Unabhängigkeit und Gleichwahrscheinlichkeit

- Bauweise und Lagerung des Kessels
- Vorschriften an den Croupier
 - Kugellauf entgegen gesetzt zu Drehrichtung des Kessels
- Mindestens 3 bis 5 vollständige Umdrehungen, sonst Ansage „no spin“
- Wechsel der Drehrichtung nach jedem Wurf
- Keine zu hohe Geschwindigkeit
- ...

https://www.youtube.com/watch?v=BPxa2_40nE



Suchen



How to Spin a Roulette Ball #roulette #lasvegas



CEG Dealer School ✓
323.000 Abonnenten

Mitglied werden

Abonnieren

👍 604



ChatGPT beauftragen, um reale Datensätze zu finden

- Roulette-Daten findet das System nicht, aber

2 Selbst simulierte Roulette-Daten (didaktisch sauber & flexibel)

Für **Statistik- und Data-Science-Zwecke** (Gesetz der großen Zahlen, Fairness, Martingale, etc.) ist das oft die **beste Lösung**.

Europäisches Roulette

- Zahlen: 0–36
- Wahrscheinlichkeiten:
 $P(k) = 1/37$



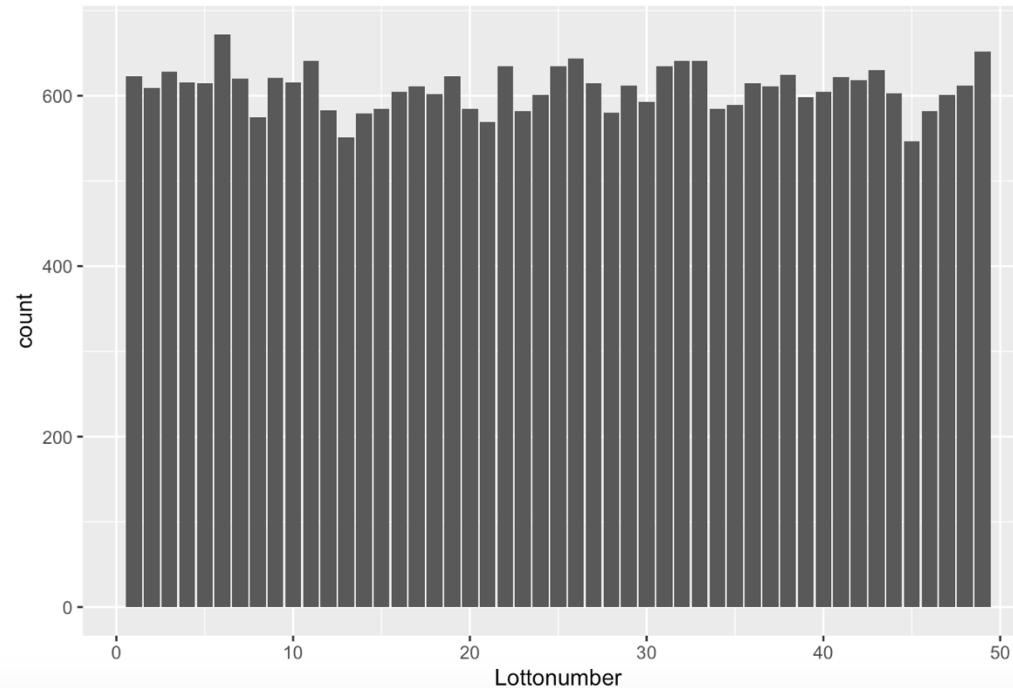
Lotto-Daten sind mit ChatGPT einfacher zu finden

Now we want to summarise all numbers from 1-49 and their appearance.

```
library(ggplot2)

ggplot(lottonumbers_count, aes(value, count)) +
  geom_bar(stat = "identity") +
  labs(x = "Lotto number", title = "Lotto numbers in Germany since 1955")
```

Lotto numbers in Germany since 1955



<https://github.com/JohannesFriedrich/LottoNumberArchive>



3. Bernoullikette und Binomialverteilung als Modell





3.1 Einführung



Zwei unterschiedliche Typen von Anwendungskontexten

1. Stochastische Prozesse mit binären Ergebnissen (Konstante Ws. ,
stochastische Unabhängigkeit)
 - Stochastische unabhängiger Wurf einer Münze
2. Stichprobenziehungen aus Populationen mit einem binären Merkmal
 - Ziehen mit Zurücklegen aus definierter Population
 - Gute Mischung nach dem Zurücklegen
 - Jedes Element hat gleiche Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden

1. Stochastische Prozesse mit binären Ergebnissen (Konstante Ws. ,
stochastische Unabhängigkeit)
 - Wiederholtes Betätigen eines Zufallsgerätes (Würfel, Glücksrad)
 - Produktionsprozesse: fehlerhafte Stücke
 - Übermittlung von binären Nachrichtensignalen
 - Ausfall von Komponenten in technischem System
 - Wiederholtes Werfen auf ein Ziel (Basketball, ...)
 - Geburt eines Kindes: biologisches Geschlecht weiblich oder nicht

Konstante Ws. und stochastische Unabhängigkeit ist zu begründen
oder Bedingungen in der Realität sind für deren Gültigkeit sind
herzustellen

Modellvalidierung wird in Lehrplänen und Bildungsstandards gefordert

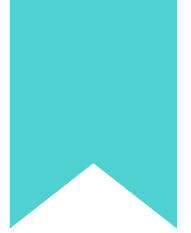
Wie kann man das beim Roulette machen?

- χ^2 -Test nutzen, ob die empirische Verteilung über die 37 (38) Ergebnisse mit der Gleichverteilungsannahme kompatibel ist
- Tests auf Zufälligkeit (auf stochastische Unabhängigkeit), wenn die Daten als Liste mit der Reihenfolge des Auftretens vorliegen

Methoden werden in der Regel (noch) nicht unterrichtet? Gibt es Elementarisierungen?

2. Stichprobenziehungen aus Populationen mit einem binären Merkmal

- Ziehen mit Zurücklegen: Gleiche Chance für jedes Element der Population herstellen
- Ziehen ohne Zurücklegen: Anzahl der Erfolge ist hypergeometrisch verteilt, unter bestimmten Bedingungen ist die Binomialverteilung eine gute Approximation (Stichprobenumfang klein gegenüber Populationsgröße, $n/N \leq 5\%$)
- Population muss klar definiert sein
- Es muss realistisch sein, dass praktisch eine Zufallsstichprobe aus der Population gezogen werden kann



3.2 ChatGPT entwickelt problematische Aufgaben



RB: Nenn mir eine Aufgabe zum Stichprobenziehen aus Schulbüchern, wo es unrealistisch ist, dass eine solche Zufallsstichprobe praktisch gezogen werden kann.

ChatGPT: Eine Schule mit 1.200 Schülern möchte herausfinden, wie viele Schüler täglich mit dem Fahrrad zur Schule kommen. Dafür soll eine repräsentative Zufallsstichprobe von 100 Schülern gezogen werden. Wie sollte die Zufallsstichprobe ausgewählt werden?

„1. Kein vollständiges Verzeichnis der Schülerdaten:

- Für die Zufallsauswahl bräuchte man eine vollständige Liste aller Schüler der Schule (z. B. eine Namensliste), aus der die Stichprobe zufällig gezogen wird. Solche Listen sind oft aus Datenschutzgründen nicht zugänglich oder existieren nicht in der benötigten Form.

2. Logistischer Aufwand:

- Selbst wenn es eine Schülerliste gibt, müsste man sicherstellen, dass die 100 ausgewählten Schüler auch tatsächlich zur Befragung erscheinen. In der Praxis fehlen oft Schüler wegen Krankheit, Veranstaltungen oder anderen Gründen.

3. Zugang zu den Schülern:

- Die Schüler könnten sich in verschiedenen Klassenräumen oder Gebäuden befinden, was das Befragen oder Beobachten von 100 zufällig ausgewählten Schülern in kurzer Zeit schwierig macht.

4. Selbstselektion bei Befragungen:

- Häufig wird bei solchen Aufgaben implizit angenommen, dass die Schüler ehrlich und vollständig antworten. In der Praxis könnten jedoch viele Schüler keine genauen Angaben machen oder gar nicht teilnehmen, wodurch die Stichprobe verzerrt wird.

5. Kosten und Zeit:

- In der Realität bräuchte man für das Ziehen und Befragen einer Zufallsstichprobe Zeit, Ressourcen und eine klare Organisation, was für Schülerprojekte unrealistisch ist.“

RB an alle: Warum macht man eigentlich nicht eine Totalerhebung, über die Klassenlehrerin und Klassenlehrer?

Weitere Probleme

„Täglich mit dem Fahrrad zur Schule kommen“

- Gibt es keine Variation bei den Schüler:innen? (Wetter, Jahreszeiten, Wochentage)
- Wenn ja: Wie legt man genau fest, wenn man die Ausprägungen trotzdem zuordnen will
- Ist die Fragestellung nicht völlig uninteressant? Warum will man das überhaupt wissen?

Realitätsnahe Fragestellung (mit „Warum“ und „unter welchen Bedingungen“)

ChatGPT: Die Schule (1.200 Schüler:innen) möchte den Radverkehr zur Schule erhöhen und überlegt Maßnahmen wie bessere Abstellmöglichkeiten, sichere Wege, Duschen/Umkleiden oder Elterninformation. Dafür soll empirisch geklärt werden:

Wie groß ist der Anteil der Schüler:innen, die an einem typischen Schultag mit dem Fahrrad zur Schule kommen?

Welche Gründe sprechen bei anderen dagegen (z. B. Entfernung, Zeit, Verkehrssicherheit, Wetter, fehlender sicherer Stellplatz, Elternregeln, fehlendes Fahrrad)?

Unter welchen Bedingungen würden diese Schüler:innen eher (häufiger) mit dem Fahrrad kommen?

Mini-Fragebogen von ChatGPT

B. Wenn nicht Fahrrad: Hauptgründe (max. 2 ankreuzen)

- zu weit / zu steiler Weg
- gefährlicher Verkehr / unsichere Route
- kein sicherer Abstellplatz / Diebstahlangst
- Zeit / Umwege
- Wetter / Kleidung
- Eltern erlauben es nicht
- kein (fahrsicheres) Fahrrad
- gesundheitlich / körperlich
- anderes: ____

D. Kontextvariablen (für Analyse)

- Jahrgangsstufe
- ungefähre Schulweg (z. B. <1 km, 1–3, 3–5, >5)
- optional: Fahrrad verfügbar (ja/nein)

C. Unter welchen Bedingungen würdest du eher mit dem Fahrrad kommen?

- sicherere Radwege/Querungen
- mehr/überdachte Fahrradständer
- bewachter Bereich / bessere Schlösserinfos
- Umkleide/Dusche/Spinde
- „Bike-to-school“-Aktionen / Klassenwettbewerb
- Reparatur-/Check-Angebote
- nichts davon / ich würde trotzdem nicht kommen



3.3 Dirk Nowitzki macht 2008 in NRW Abitur



Nowitzki – Aufgabe (NRW-Abitur 2008) - Teil a

Der deutsche Basketball-Profi Dirk Nowitzki spielt in der amerikanischen Profiliga NBA beim Club Dallas Mavericks. In der Saison 2006/2007 erzielte er bei Freiwürfen eine Trefferquote von 90,4 %.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er*

(1) *genau 8 Treffer bei 10 Versuchen erzielt,*

(2) *höchstens 8 Treffer bei 10 Versuchen erzielt,*

(3) *höchstens vier Mal nacheinander bei Freiwürfen erfolgreich ist.* (12 Punkte)



Was könnte es hieran zu kritisieren geben?

Modellösung a)

1. Die Zufallsvariable X für die Anzahl der Treffer bei 10 Versuchen ist $B_{10;0,904}$ -verteilt.

$$\text{Also ist } P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,904^8 \cdot 0,096^2 \approx 0,185 = 18,5 \%$$

2. $P(X \leq 8) = 1 - P(X > 8) = 1 - (10 \cdot 0,904^9 \cdot 0,096 + 0,904^{10}) \approx 0,248 = 24,8 \%$.

3. Man betrachtet das Gegenereignis, dass er fünf Treffer hintereinander schafft. Hierfür beträgt die Wahrscheinlichkeit $0,904^5 \approx 0,604$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $1 - 0,604 = 0,396 = 39,6 \%$.

Aufgabe a3: Wenn jemand $n = 10$ annimmt

- In der Presse wird behauptet, dass die Anzahl der Versuche fehlt, um die Aufgabe lösen zu können. Da aber die Anzahl 10 in (1) und (2) angegeben wird, liegt es nahe, auch 10 in (3) anzunehmen. Nimmt man an, dass 10 Versuche durchgeführt wurden, ist die Aufgabe nun wohl gestellt, aber die Berechnung der Lösung ist äußerst langwierig: Von den $2^{10} = 1024$ möglichen Versuchsreihen muss man die Anzahl derjenigen bestimmen, in denen die Eins höchstens viermal nacheinander vorkommt. Dies macht man am besten, indem man zuerst die Gesamtanzahl k von Erfolgen festlegt. Bei $k = 10$ und $k = 9$ überlegt man sich schnell, dass es keine Möglichkeit gibt, die Einsen so zu platzieren, dass sie höchstens viermal nacheinander vorkommen. Bei $k = 8$ gibt es 15 Möglichkeiten, die hier aufgelistet sind:

(0111101111)	(1011101111)	(1011110111)
(1101101111)	(1101110111)	(1101111011)
(1110101111)	(1110110111)	(1110111011)
(1110111101)	(1111001111)	(1111010111)
(1111011011)	(1111011101)	(1111011110)

Nun kann man das Ganze wiederholen mit $k = 7$ usw. Es ist klar, dass der Schwierigkeitsgrad und der dafür notwendige Zeitaufwand einer (Teil-)Abituraufgabe nicht angemessen sind.

Davies, P. L. (2009). Einige grundsätzliche Überlegungen zu zwei Abituraufgaben. *Stochastik in der Schule*, 29(2), 2-7.

1. Die Teilaufgabe a3) ist unvollständig und deshalb unlösbar
2. Aus den Angaben einer empirischen Trefferquote kann man nicht direkt auf die theoretische Wahrscheinlichkeit schließen
3. Die implizite Annahme einer Binomialverteilung ist zwar schulüblich, aber die Richtigkeit kann nicht einfach unterstellt werden

Verbessern der Nowitzki-Aufgabe Variante 1

Gehen Sie davon aus, dass Sie die Anzahl der Erfolge in einer Serie von Nowitzkis Freiwürfen mit einer Binomialverteilung modellieren können. Aufgrund langjähriger Erfahrung weiß man, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit 0,9 beträgt.

Berechnen Sie unter diesen Modellannahmen nun folgende Wahrscheinlichkeiten...

  Ihre Beurteilung der Variante 1

Problem: Eigentlich ist die Formulierung „aus langjährigen Erfahrungen“ ein didaktischer Trick. Was man weiß, dass 2006/2007 498 von 551 Versuchen erfolgreich waren. Daraus könnte man ein 95%- Konfidenzintervall berechnen. Das wäre $[0,87932; 0,9284]$. Man müsste für dies Spektrum von p Lösungen errechnen.

Verbessern der Nowitzki-Aufgabe Variante 2

Der deutsche Basketball-Profi Dirk Nowitzki spielt in der amerikanischen Profiligen NBA beim Club Dallas Mavericks. In der Saison 2006/2007 erzielte er bei Freiwürfen eine Trefferquote von 90,4 %.

Wir wissen nicht, welche Trefferquote Nowitzki in Zukunft haben wird, aber näherungsweise gehen wir von einer Trefferquote von 0,9 aus. Wir wissen auch nicht, ob die Würfe stochastisch unabhängig durchgeführt werden, oder ob es Abhängigkeiten gibt (Ermüdungserscheinungen, Ermutigung bei Erfolgsserien... Aus Studien weiß man aber, dass die Annahme stochastischer Unabhängigkeit eine gute Approximation ist.

Gehen Sie davon aus, dass Sie die Anzahl der Erfolge in einer Serie von Nowitzkis Freiwürfen mit einer Binomialverteilung modellieren können.

Berechnen Sie unter diesen Modellannahmen nun folgende Wahrscheinlichkeiten...

  Ihre Beurteilung der Variante 2

Verbessern der Nowitzki-Aufgabe. Variante 3

Der deutsche Basketball-Profi Dirk Nowitzki spielt in der amerikanischen Profiligen NBA beim Club Dallas Mavericks. In der Saison 2006/2007 erzielte er bei Freiwürfen eine Trefferquote von 90,4 %. **Nowitzki machte $n = 551$ Freiwürfe**

- a) *Was könnte aus inhaltlichen Gründen dagegen sprechen, die $n=551$ Freiwürfe als Bernoulli-Prozess (stochastische Unabhängigkeit) mit konstantem $p = 0,907$ zu interpretieren?*
- b) *Wenn die komplette Serie der Länge aus 0 (Misserfolg) und 1 (Erfolg) vorliegen würde. Was müsste man untersuchen, um zu prüfen, ob das Bernoulli-Prozess-Modell mit den Daten verträglich ist?*
- c) Gehen Sie nun davon aus, dass Sie die Anzahl der Erfolge in einer Serie von Nowitzkis Freiwürfen mit einer Binomialverteilung mit $p = 0,904$ modellieren können.

Berechnen Sie unter diesen Modellannahmen nun folgende Wahrscheinlichkeiten...

  Ihre Beurteilung der Variante 3

Gibt es die „Hot Hand“ im Basketball eigentlich wirklich?



Analysen zeigen, dass ein Bernoulli-Prozess mit den Daten kompatibel ist.

Auch längere Serien können in reinen Zufallsfolgen auftreten

Gilovich, T., Vallone, R., & Tversky, A. (1985). The hot hand in basketball: On the misperception of random sequences. *Cognitive Psychology*, 17, 295-314.

Tversky, A., & Gilovich, T. (1989). The cold facts about the "hot hand" in basketball. *Chance*, 2(1), 16-21.

Larkey, P. D., Smith, R. A., & Kadane, J. B. (1989). It's Okay to Believe in the "Hot Hand". *CHANCE*, 2(4), 22-30.

Tversky, A., & Gilovich, T. (1989). The "Hot Hand": Statistical Reality or Cognitive Illusion? *CHANCE*, 2(4), 31-34.

Das **“Hot-Hand-Phänomen”** im Basketball beschreibt die Vorstellung, dass ein Spieler nach einer Serie erfolgreicher Würfe eine erhöhte Wahrscheinlichkeit hat, weitere Treffer zu erzielen. Die Existenz dieses Phänomens ist seit Jahrzehnten Gegenstand wissenschaftlicher Debatten.

Frühe Studien und Skepsis:

Eine einflussreiche Studie aus dem Jahr 1985 von Gilovich, Vallone und Tversky kam zu dem Schluss, dass die Wahrnehmung der “heißen Hand” eine Fehlinterpretation zufälliger Sequenzen sei und dass aufeinanderfolgende Treffer statistisch unabhängig voneinander auftreten.

Neuere Forschungen und differenzierte Erkenntnisse:

Aktuellere Untersuchungen haben jedoch Hinweise darauf gefunden, dass das “Hot-Hand-Phänomen” unter bestimmten Bedingungen existieren könnte:

- **Freiwürfe:** Analysen von über 300.000 NBA-Freiwürfen zeigten, dass Spieler nach einem erfolgreichen Wurf eine leicht erhöhte Wahrscheinlichkeit für einen weiteren Treffer hatten.
- **Wurfposition:** Eine Studie der Wake Forest University aus dem Jahr 2023 stellte fest, dass das “Hot-Hand-Phänomen” insbesondere dann auftritt, wenn Spieler mehrere Würfe von derselben Position ausführen. („Hot hand’ is real, but there’s a catch“ (<https://news.wfu.edu/2023/11/06/hot-hand-is-real-but-theres-catch/>))

Fazit:

Die aktuelle Forschung legt nahe, dass das “Hot-Hand-Phänomen” im Basketball unter bestimmten Umständen real ist, jedoch oft subtil und kontextabhängig. Die Debatte illustriert die Komplexität menschlicher Wahrnehmung und die Herausforderungen bei der Interpretation statistischer Daten in sportlichen Leistungen.

Literatur zur Kontroverse um die Nowitzki - Aufgabe

Literatur

Diepgen, R. (2008). Kein Witz!? Zur Nowitzki-Aufgabe im NRW Zentralabitur 2008. *Stochastik in der Schule*, 28(3), 20-28.

Davies, P. L. (2009). Einige grundsätzliche Überlegungen zu zwei Abituraufgaben. *Stochastik in der Schule*, 29(2), 2-7.

Borovcnik, M. (2009). "Anwendungen" und Anwendungen - Zentrales Abitur und vergebene Chancen für den Unterricht in Stochastik. *Stochastik in der Schule*, 29(3), 10-18.

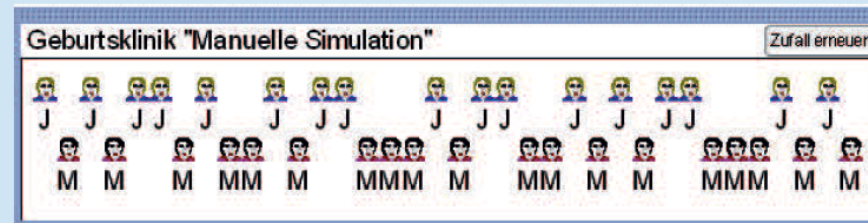
Testen auf Zufälligkeit / Unabhängigkeit; elementar mit Simulation

12.3 Zufällig oder nicht? – Ein Test auf Zufälligkeit

Aufgaben

Konstruieren Sie „nach Gefühl“ eine Abfolge von 36 Jungen- und Mädchengeburt in einer Geburtsklinik, wobei Sie annehmen sollen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Jungen- oder Mädchengeburt jeweils 0,5 beträgt. Versuchen Sie dabei eine „typisch“ zufällige Abfolge aufzuschreiben (Handsimulation). In der FATHOM-Datei *Geburtsklinik.ftm* wird die zufällige Abfolge von Geburten simuliert.

- Experimentieren Sie mit der FATHOM-Datei. Inwieweit unterscheidet sich Ihre Handsimulation von den simulierten Abfolgen in FATHOM?
- Wie viele Wechsel zwischen Jungen- und Mädchenserien kommen in Ihrer Handsimulation vor? Was ist typisch für eine Simulation mit FATHOM? Bestimmen Sie die Anzahl der Wechsel wie in Ihrer Handsimulation oder in der FATHOM-Simulation.
- Betrachten Sie jeweils die Länge der längsten Serie von Jungen- oder Mädchen in der FATHOM-Simulation mit Ihrer Handsimulation.



Eine „typisch“ zufällig aussehende Folge?!

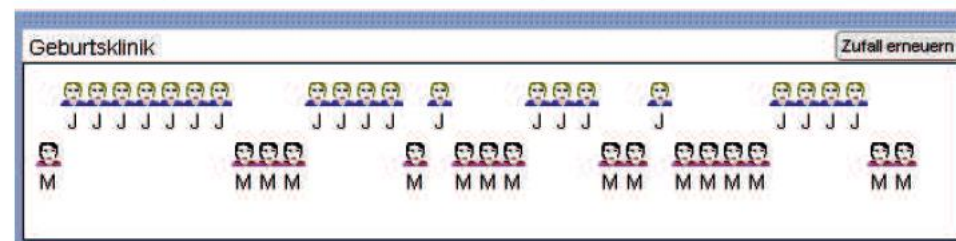


Abb. 1: Darstellung einer „echten“ Simulation von Geburtenabfolgen

Bestimmen der Referenzverteilung von X durch Simulation

X_1 Anzahl der Runs
 X_2 Maximale Runlänge

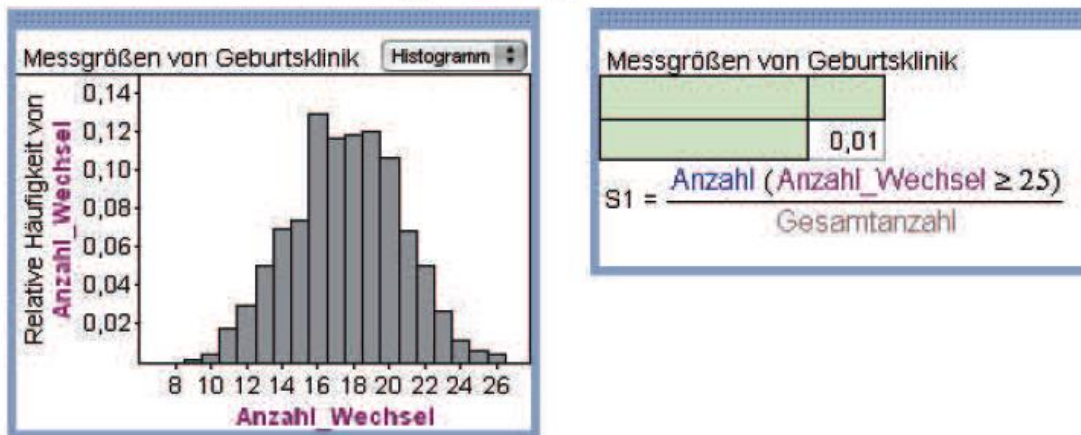


Abb. 3: Histogramm und Auswertungstabelle zum Merkmal Anzahl_Wechsel

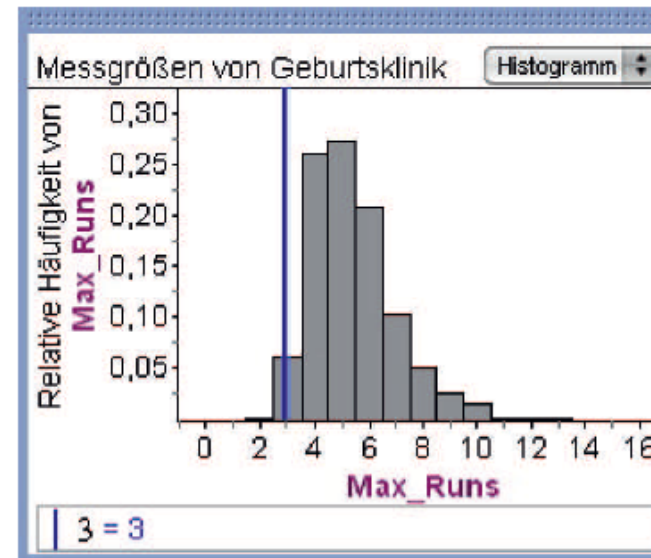
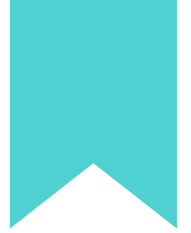


Abb. 4: Histogramm mit eingezeichnetem Wert



3.4 Flugüberbuchungsaufgaben



Aufgabe

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft Flugzeuge mit jeweils 100 Plätzen, die vor Flugantritt gebucht und bezahlt werden.

Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass

- jeder Platz einzeln gebucht wird,
- auf dieser Strecke stets alle Plätze gebucht werden,
- ein Platz, dessen Buchung storniert wird, nicht erneut gebucht werden kann.

Im Mittel werden 10 % der gebuchten Plätze kurzfristig storniert (d. h. von den Leuten, die gebucht haben, doch wieder abgesagt).

Von einer Person, die tatsächlich fliegt, nimmt die Fluggesellschaft 200 € ein, bei einer Stornierung wegen teilweiser Erstattung nur 100 €.

a)



Nennen Sie eine Annahme, sodass die mögliche Anzahl der Stornierungen bei einem Flug als binomialverteilt modelliert werden kann. Beschreiben Sie eine reale Situation, in der diese Annahme **nicht** zutrifft.

Im Folgenden wird nun angenommen, dass die mögliche Anzahl der Stornierungen bei einem Flug tatsächlich binomialverteilt ist.

Die Flugüberbuchungsaufgabe: Weitere Vorausgaben für unterrichtliche Behandlung

Die Stornierungswahrscheinlichkeit wird vereinfachend als konstant angenommen, Nenne Faktoren, die diese in der Realität aber beeinflussen könnten.

- Zeitpunkt der Buchung (Frühbucher, last minute)
- Fluglinie, Abflugszeit und Flughafen
- Abflugtag (Urlaub oder Nebensaison)
- Strecken und Ziele
- Wetter und geopolitische Ereignisse
- Reisezweck: Geschäftsreisende stornieren tendenziell eher als Privatreisende,
- Tickettyp (Flexibel oder nicht)

-   Sollte man solch eine Vorausgabe stellen?
- Darf man Sachwissen in einem Mathematiktest abprüfen?

Wie machen das die Airlines mit der Flugüberbuchung wirklich?

  Vermutungen?

Stichwort für Google-Suche „no-show rates“

Die Praxis außerhalb der Schule: Anwendung Maschinelles Lernen; Trainieren mit realen Daten

No-Show Passenger Prediction for Flights

[PDF] joiv.org

WS Chin, [CY Ting](#), CL Cham - JOIV: International Journal on Informatics ...,
2023 - joiv.org

... of **machine learning** algorithms to reduce the rate of **no-shows**... a predictive model to identify **no-shows**' patients to increase ... to develop **prediction** models to **predict passenger no-shows**. ...

☆ Speichern [Zitieren](#) [Ähnliche Artikel](#) [Alle 4 Versionen](#) [↗](#)

Passenger-based predictive modeling of airline no-show rates

[PDF] acm.org

Volltext@UB Paderborn

RD Lawrence, SJ Hong, J Cherrier - Proceedings of the ninth ACM ..., 2003
- dl.acm.org

... to **predict** cabin-level **no-show** rates using specific information on the individual **passengers** ... The first of these models computes the **no-show** probability for each **passenger**, using both ...

☆ Speichern [Zitieren](#) [Zitiert von: 83](#) [Ähnliche Artikel](#) [Alle 8 Versionen](#) [↗](#)

[PDF] No-show forecast using passenger booking data

[PDF] lu.se

D Zenkert - 2017 - lup.lub.lu.se

... Since these models haven't been tested for other airlines in this thesis, it's hard to give a general decision whether **machine learning** should be used when **forecasting noshow** rates. ...

☆ Speichern [Zitieren](#) [Zitiert von: 11](#) [Ähnliche Artikel](#) [Alle 3 Versionen](#) [↗](#)

Die Praxis außerhalb der Schule: Anwendung Maschinelles Lernen; Trainieren mit realen Daten

[HTML] A novel **passenger flow prediction** model using
deep learning methods

[L Liu, RC Chen](#) - *Transportation Research Part C: Emerging ...*, 2017 -
Elsevier

... model to **predict** the hourly **passenger** flow using a three-stage **deep learning**
architecture. ... combined with the supervised DNN can **predict** the **passenger** flow for any
specified hour ...

☆ Speichern  Zitieren Zitiert von: 271 Ähnliche Artikel Alle 5 Versionen 

Decision support system for **predicting** the number of **no-**
show passengers in airline industry

[B Petrović, P Milošević](#) - *Tehnički vjesnik*, 2021 - hrcak.srce.hr

... **prediction** process, and enables an airline to use a logical approach when **predicting** the
number of **no show passengers**. ... comparing it to existing **machine learning** based
models. This ...

[HTML] [sciencedirect.c...](#)
Volltext@UB Paderborn

[PDF] [srce.hr](#)
Volltext@UB Paderborn

An ChatGPT: Ist es realistisch mit einer festen no-show-rate zu rechnen?

1. Strecke & Zweck der Reise

Geschäftsreisen: höhere No-Show-Rate (Termine ändern sich)

Urlaubsflüge: niedrigere No-Show-Rate (stärker geplant)

2. Ticketart

Flexible Tickets: deutlich höhere No-Show-Rate

Nicht stornierbare Sparpreise: sehr niedrige No-Show-Rate

3. Zeitpunkt

Tagesrandflüge \neq Morgenflüge

Wochentag \neq Wochenende

Ferien \neq Schulzeit

4. Externe Einflüsse

Wetter

Streiks

Anschlussflugrisiken



Pandemie-Effekte (stark schwankend!)

Flugüberbuchung in anderen Kontexten?

Von den 100 Beschäftigten eines Betriebes kommen durchschnittlich 40% mit einem eigenen Auto zur Arbeit.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit genügt ein Parkplatz mit 50 Plätzen?
- b) Wie viele Plätze müssen zur Verfügung stehen, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% ausreichen?

Leistungskurs Stochastik, Schroedel 2003, S. 131 (hrsg von Griesel, Postel, Gundlach, Suhr)

  Welche Kritik, welche Verbesserungsvorschläge für diese Aufgabe!

Lösung 1

An jedem Tag kommen genau 40 Personen mit dem Auto.

Der Parkplatz kann verkleinert werden!

Lösung 2

Vorüberlegung

An x Tagen des Jahres kommen 100 Personen, an $360 - x$ kommen 10 Personen.
Wie groß muss x sein, dass im Durchschnitt 40% der Beschäftigten kommen

$$\frac{100x + (360 - x) \cdot 10}{360} = 40$$

$$\square \quad x = 120$$

Aufgabe: An 120 Tagen des Jahres kommen 100 Personen, an 240 kommen 10 Personen mit dem Auto, also durchschnittlich 40%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reicht ein Parkplatz mit 50 Plätzen? Antwort 2/3!

Die normative Lösung

- Die 100 Beschäftigten des Betriebes haben alle ein Auto zur freien Verfügung.
- Morgens nach dem Aufstehen holen sie sich einen Kaffee und drehen als erstes ein Glücksrad mit einem Anteil „grün“ von 40%.
- Zeigt das Glücksrad „grün“, dann nehmen sie ihr Auto, sonst nicht.
- Die Anzahl der benötigten Parkplätze ist Binomial $(100; 0,4)$ – verteilt.



Bild erstellt von ChatGPT

Kritik von ChatGPT an der Parkplatz - Aufgabe

Beschäftigte

haben meist ein **stabiles Mobilitätsmuster**:

„Ich fahre immer Auto“

„Ich fahre nie Auto“

„Ich fahre nur bei Regen Auto“

👉 Die 40 % sind **kein individuelles Zufallsereignis**, sondern ein **Aggregat aus festen Gruppen**.

2 Keine Unabhängigkeit der Ereignisse

Die Aufgabe setzt voraus:

Jede Person entscheidet **unabhängig** von allen anderen.

In der Realität:

Wetter betrifft viele gleichzeitig

Schichtbeginn oder Gleitzeit erzeugt Korrelation

Parkplatzknappheit selbst beeinflusst das Verhalten

(„Wenn es voll ist, fahre ich morgen nicht mit dem Auto“)

3 Die 40 % sind kein stabiler Parameter

Im Betrieb schwankt der Anteil der Autofahrer systematisch:

- Wochentag
- Jahreszeit
- Homeoffice-Tage
- Krankheitswellen
- ÖPNV-Störungen


4 Konsequenzen sind rückgekoppelt

Bei Flugüberbuchung:

Passagiere erfahren die Überbuchung **erst am Gate** ihr Erscheinen wird nicht durch frühere Überbuchungen beeinflusst

Im Betrieb:

zu wenige Parkplätze \Rightarrow Verhalten ändert sich
Mitarbeitende weichen aus, kommen früher/später,
bilden Fahrgemeinschaften

 Die Zufallsvariable beeinflusst ihren eigenen Parameter



3.5 Geschlechterverteilung der Kinder in Familien binomialverteilt?



Geschlechterverteilung in Familien

Geissler, A. (1889). Beiträge zur Frage des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen. *Zeitschrift des Königlich Sächsischen Bureaus*, 01-24.

Heft I u. II.

ZEITSCHRIFT
DES

Jahrg. 1889.

K. SÄCHSISCHEN  STATISTISCHEN

Zu beziehen durch Post und Buchhandel.
Kommissions-Verlag der Kgl. Expedition der
Leipziger Zeitung in Leipzig u. der Buchhand-
lung von R. v. Zahn & Jaensch in Dresden.

BUREAUS.

Die Zeitschrift erscheint in halbjährigen
Doppelheften. Preis des Jahrg. 3 Mark.
Einzelne Hefte werden mit 1 M. 50 Pf.
berechnet.

Beiträge zur Frage des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen.

Von Medizinalrath Dr. med. ARTHUR GEISSLER.

I. Das Geschlechtsverhältnifs bei den Kindern gleichen Stammes.

Einleitung.

| In kleineren Staaten lassen sich, wenn auch im Laufe

Aufgabe

Wie erforscht man das Geschlechterverhältnis?

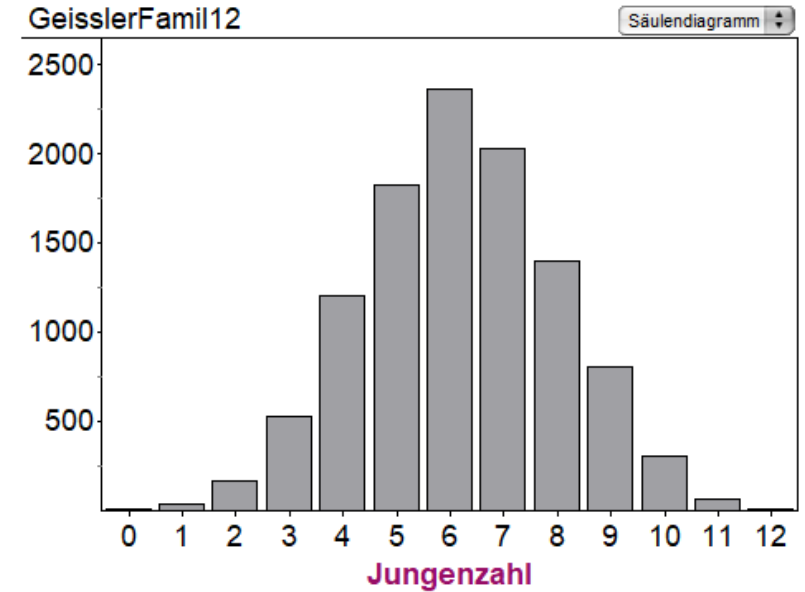
Fast 10 Jahre lang erfasste der sächsische Arzt und Statistiker Dr. Arthur Geissler (1832 – 1902) rund 4 Millionen Daten zur Anzahl und zum Geschlecht von Kindern bei sächsischen Familien. Aus der Veröffentlichung „Beiträge zur Frage des Geschlechterverhältnisses der Geborenen“ (1889) stammen die Daten, die in der nebenstehenden Tabelle aufbereitet wurden. Dabei handelt es sich um 10690 Familien, die zum Befragungszeitpunkt 12 Kinder geboren hatten. Angegeben ist die Anzahl der Familien mit 0, 1, 2, ..., 12 Jungen.

- 1) Modellieren Sie die Daten durch eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 12$ und $p = 0,5$ und vergleichen Sie mit den realen Daten. Wie beurteilen Sie die Passung des Modells zu den Daten?
- 2) Verbessern Sie das Modell aus 1), indem Sie den Parameter p verändern. Wie beurteilen Sie nun die Übereinstimmung von Modell und Daten?

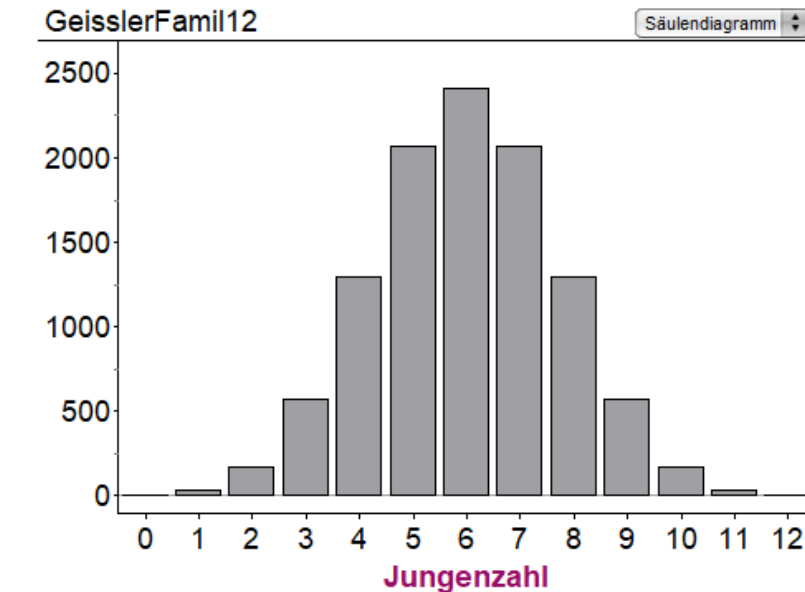
	Jungenanzahl	Familienanzahl
1	0	6
2	1	29
3	2	160
4	3	521
5	4	1198
6	5	1821
7	6	2360
8	7	2033
9	8	1398
10	9	799
11	10	298
12	11	60
13	12	7

GeisslerFamilien12					
	J...	Fa...	BinWs	BinErw	Residuen
=			BinomialWs (Jungenanzahl; 12; 0,5)	BinWs*10690	Familienanzahl – BinErw
1	0	6	0,0002	3	3
2	1	29	0,0029	31	-2
3	2	160	0,0161	172	-12
4	3	521	0,0537	574	-53
5	4	1198	0,1208	1292	-94
6	5	1821	0,1934	2067	-246
7	6	2360	0,2256	2412	-52
8	7	2033	0,1934	2067	-34
9	8	1398	0,1208	1292	106
10	9	799	0,0537	574	225
11	10	298	0,0161	172	126
12	11	60	0,0029	31	29
13	12	7	0,0002	3	4

Abb. 1: Geissler-Daten: erweiterte Tabelle mit einfachem Binomialmodell $n = 12$ und $p = 0,5$

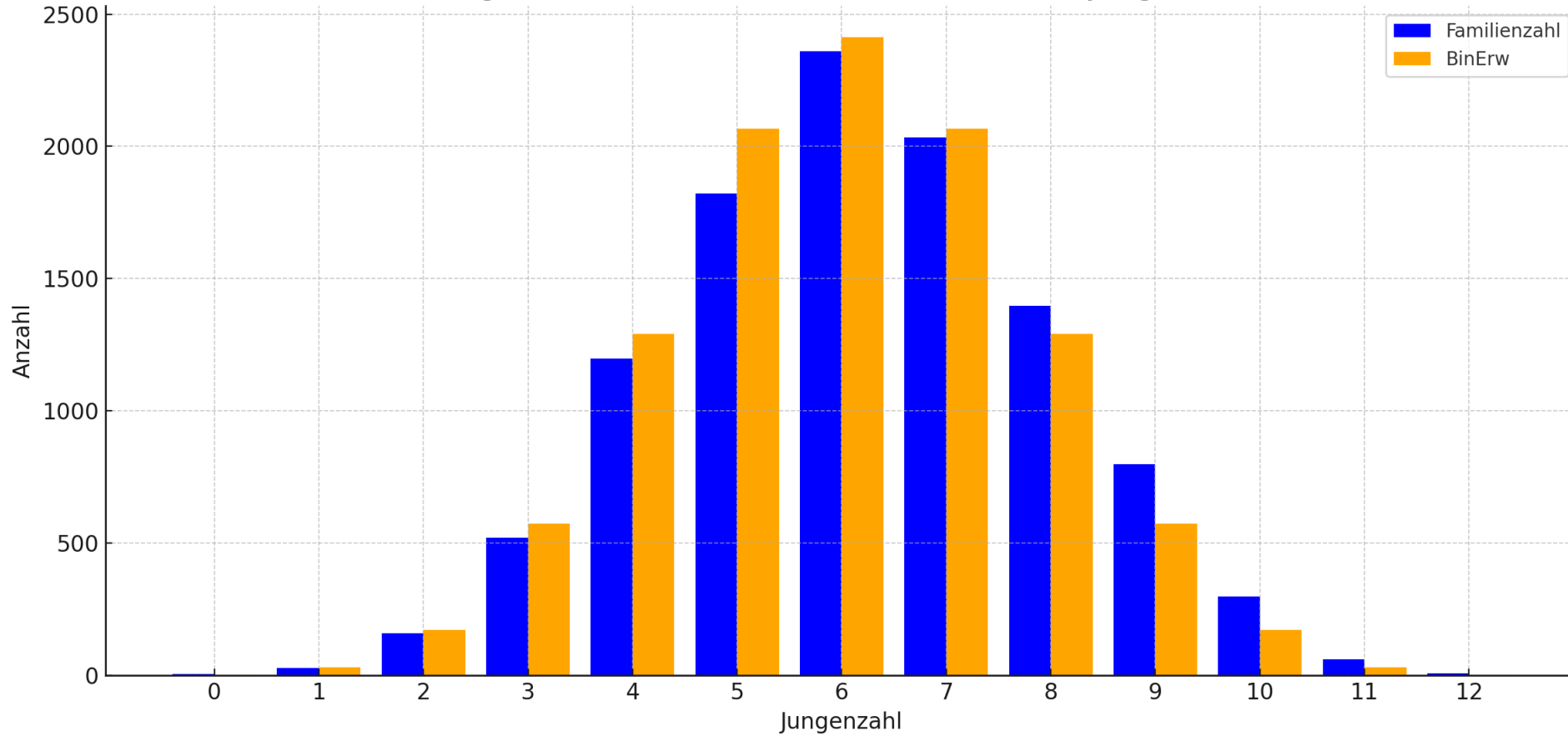


Familienanzahl



BinErw

Vergleich der Familienzahl und BinErw nach Jungenzahl



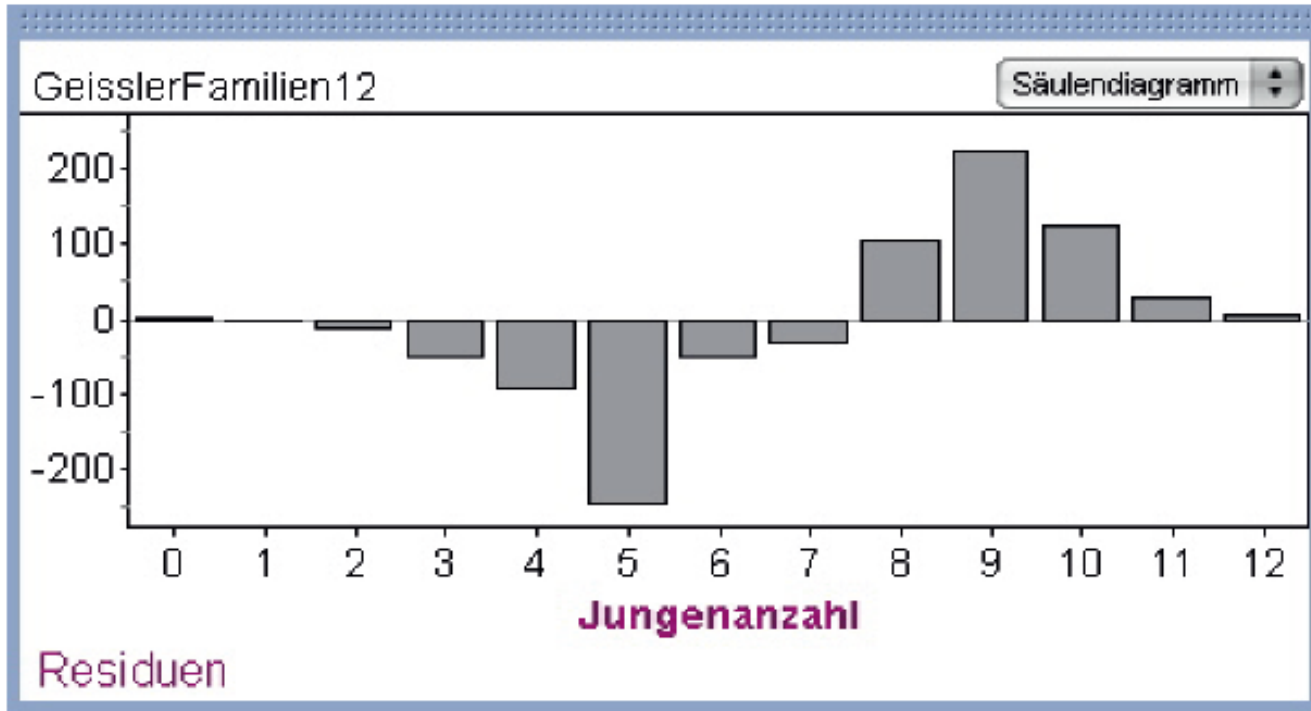


Abb. 2: Abweichungen Daten vs. Modell, $p = 0,5$

✘ ✘ Wie kann man das Modell verbessern?

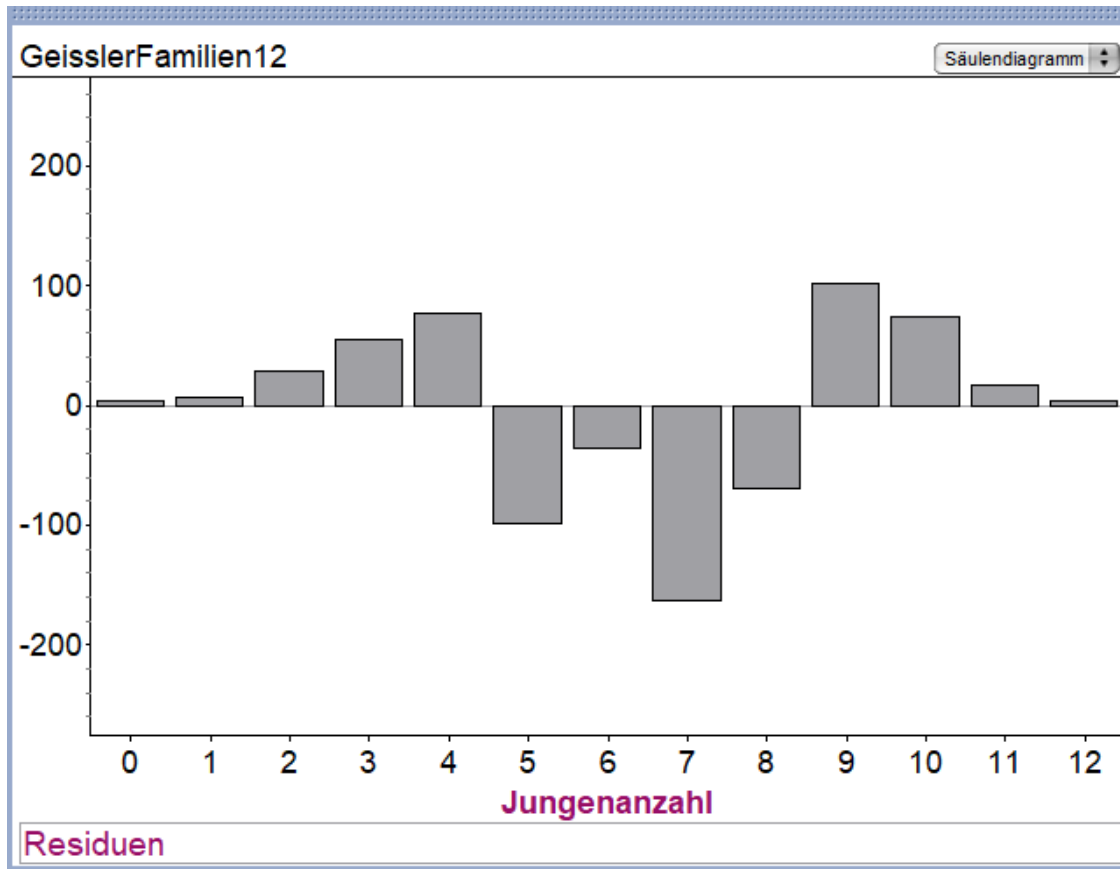
Größeres p würde die Verteilung nach rechts verschieben

1. Experimentell Variation von p versuchen.
2. $P(\text{Junge})$ aus den Daten schätzen,
 $n = 12 \cdot 10690$ wird gute Schätzung liefern
3. Rel. Hfkt. (Junge) = $0,5158$

Modell 2 und Daten

GeisslerFamilien12					
	Jungenanzahl	Familienanzahl	BinWs	BinErw	Residuen
=	Index – 1		BinomialWs (Jungenanzahl; 12; 0,5168)	BinWs•10690	Familienanzahl – BinErw
1	0	6	0,0002	2	4
2	1	29	0,0021	22	7
3	2	160	0,0122	131	29
4	3	521	0,0436	466	55
5	4	1198	0,1049	1122	76
6	5	1821	0,1796	1920	-99
7	6	2360	0,2241	2395	-35
8	7	2033	0,2054	2196	-163
9	8	1398	0,1373	1468	-70

Weniger „ausgeglichene Familien“ als bei $p = 0,5168$ erwartet



Phänomen ist seit langem in der Wissenschaft bekannt

Erklärungsversuche:

- Existenz von Zwillingen reicht als Erklärung nicht aus
- Stochastische Unabhängigkeit offenbar nicht erfüllt (genetische oder umweltbedingte Faktoren)
- Erfassen die Daten auch verstorbene Kinder
- Könnten das nicht zufällige Abweichungen sein

Beurteilung der Abweichungen von Modell und Daten mit Sigma-Regeln

- Wir erwarten bei einer Binomialverteilung, dass die Ergebnisse mit 95% im 1,96 Sigma Intervall um den Erwartungswert liegen

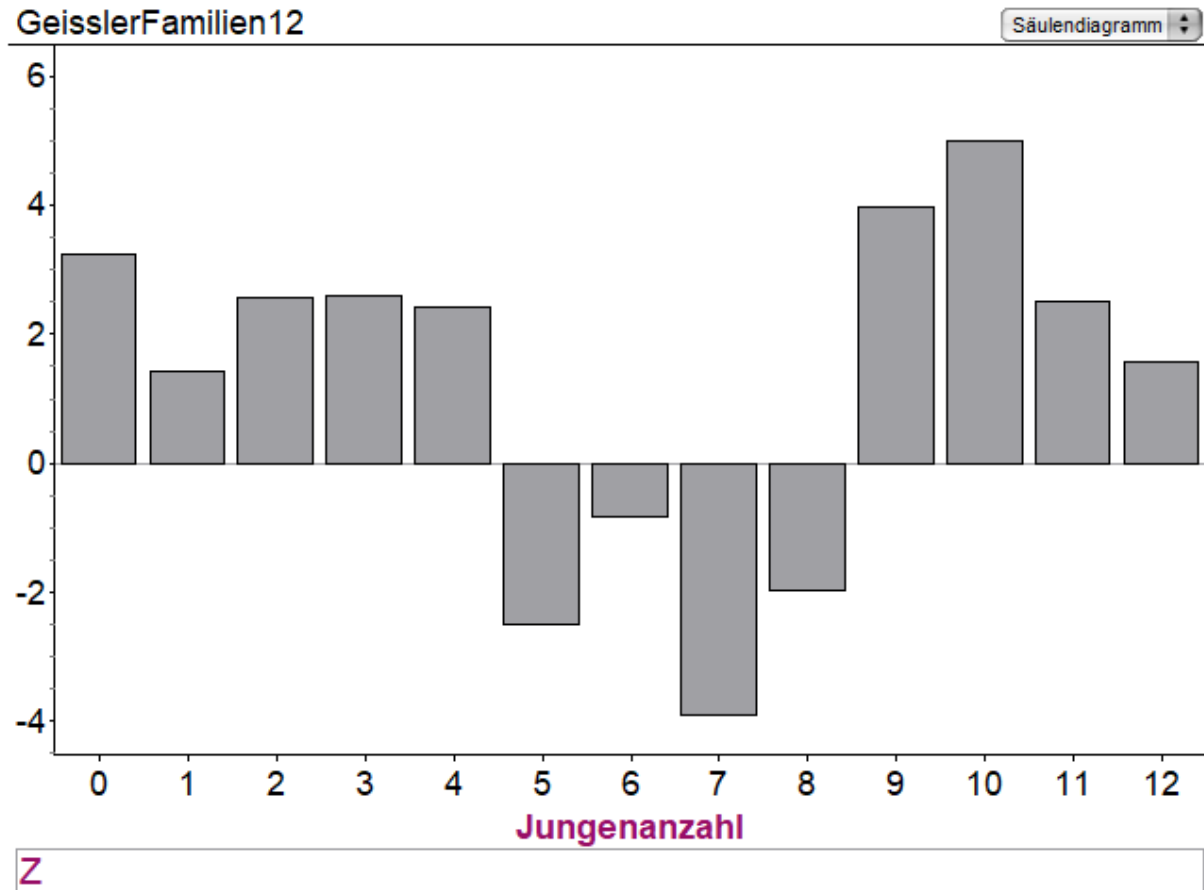
$$|X - E(X)| \leq 1,96 \sigma(x)$$

$$|X - n \cdot binWs| \leq 1,96 \cdot \sqrt{n \cdot binWs \cdot (1 - binWs)}$$

$$Z := \frac{|X - n \cdot binWs|}{\sqrt{n \cdot binWs \cdot (1 - binWs)}} \leq 1,96$$

Beurteilung der Abweichungen von Modell und Daten mit Sigma-Regeln

Jungenanzahl	Z
0	3,24361
1	1,43815
2	2,57399
3	2,59857
4	2,40703
5	-2,48382
6	-0,81707
7	-3,89776
8	-1,96187
9	3,96571
10	5,00698
11	2,50060
12	1,58413



Same-sex-Tendenz in den Geissler – Daten. Erklärungen? ChatGPT:

1. Biologische Faktoren

a) Elternabhängige Tendenz (Eltern“typen“)

- Manche Eltern (z. B. genetisch oder hormonell bedingt) haben eine **leicht erhöhte Wahrscheinlichkeit**, Kinder eines bestimmten Geschlechts zu bekommen.
- In einer Familie: Wenn einmal ein Junge geboren wurde, ist **die Wahrscheinlichkeit leicht erhöht**, dass der nächste auch ein Junge ist.

Diese Idee wird „Lexian variation“ genannt (nach dem Statistiker Lexis).

b) Hormone im Uterus

- Möglicherweise beeinflusst **das Geschlecht eines vorherigen Kindes** die hormonelle Umgebung der Mutter – und damit das Geschlecht des nächsten Kindes.
- Evidenz dafür ist **nicht eindeutig**, aber diskutiert.

Same-sex-Tendenz in den Geissler – Daten. Erklärungen? ChatGPT:

Moderne Studien (z. B. USA, Skandinavien, Demographic and Health Surveys):

- Tendenz zu “same sex” ist in großen modernen Datenbeständen **reproduzierbar**, z. B.:
- Chancen auf gleiches Geschlecht beim 2. Kind liegen leicht über 50 % (z. B. 51,2 %)
- Effekt verstärkt sich schwach mit weiterer Kinderzahl
- Effekt ist **klein**, aber **statistisch signifikant**, wenn viele Millionen Geburten analysiert werden.

Fazit:

- Die **Geissler-Daten** waren ein früher empirischer Hinweis auf eine **leichte Tendenz zu gleichgeschlechtlichen Geschwisterfolgen**.
- Die moderne Forschung bestätigt dies in vielen Ländern – biologisch und sozial erklärbar, aber **nicht stark ausgeprägt**.
- Die **Binomialverteilung** ist ein **gutes Näherungsmodell**, aber **nicht perfekt**, wenn man tiefer in die Geburtenfolgen schaut.

Geschlechterverhältnis bei Geburt (reale Daten)

Das Geschlechterverhältnis (die Anzahl der Männer pro Frau in einer Bevölkerung) bei der Geburt betrug im Jahr **2010 118,06 Jungen pro 100 Mädchen** (54,14 %), mehr als 116,86 (53,89 %) von 2000, aber 0,53 Prozentpunkte niedriger als das Verhältnis von 118,59 (54,25 %) im Jahr 2005.^[12] In den meisten westlichen Ländern liegt das Geschlechterverhältnis bei der Geburt **105 Jungen und 100 Mädchen** (51,22 %)

https://de.wikipedia.org/wiki/Demografie_der_Volksrepublik_China (abgerufen am 17.2.2026)

Laut ChatGPT: ca. 16 Millionen Geburten im Jahr 2010
Signifikante Abweichung 0,5414 von 0,5122?

Geschlechterverhältnis bei 0- bis 6jährigen in Indien

Quelle 2005

<https://censusindia.net/results/provindia2.html>

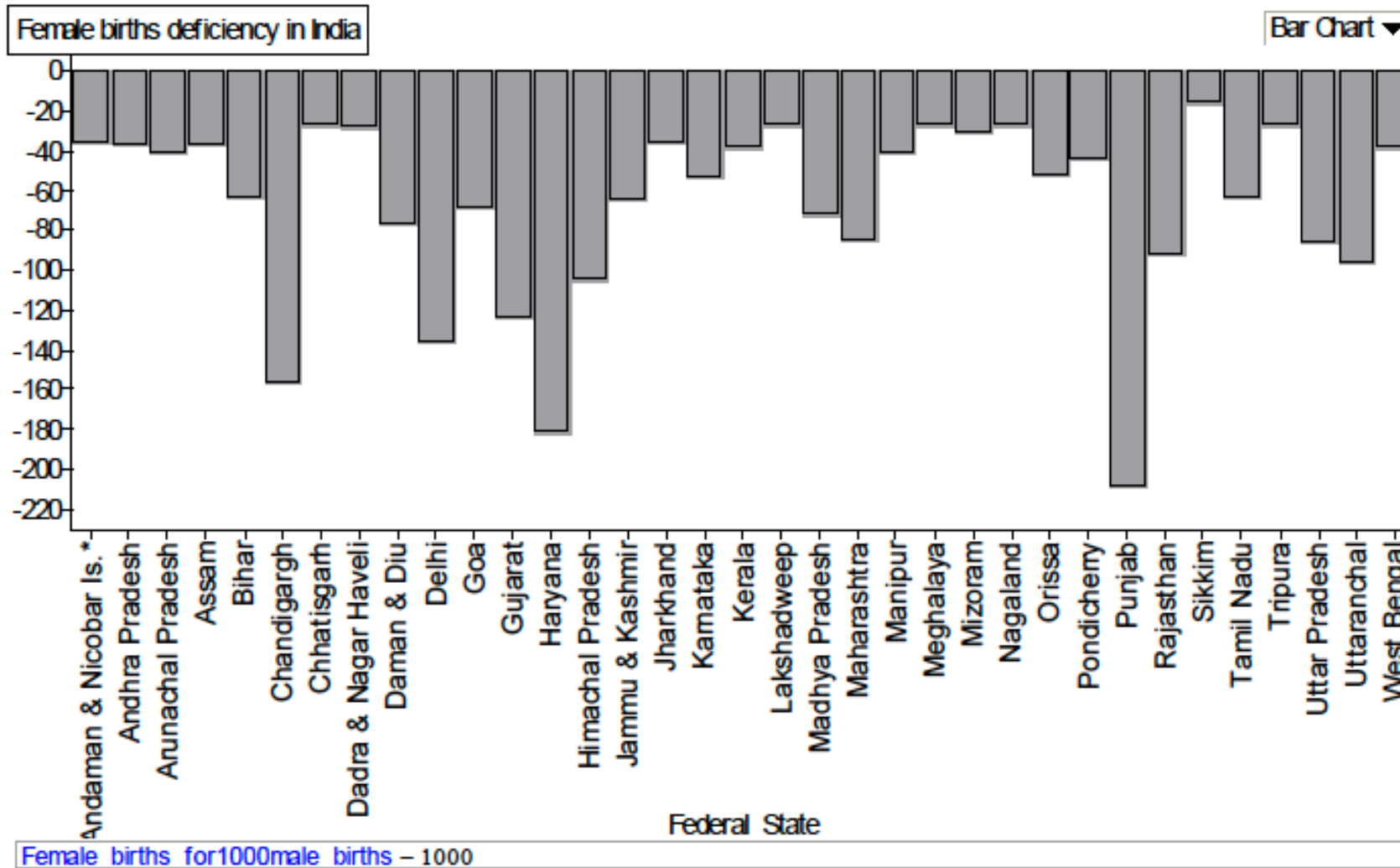
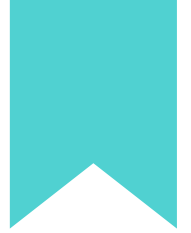


Diagramm: Biehler, R. (2005). Authentic modelling in stochastics education: The case of the binomial distribution. In G. Kaiser & H.-W. Henn (Hrsg.), *Festschrift für Werner Blum* (S. 19-30). Franzbecker.

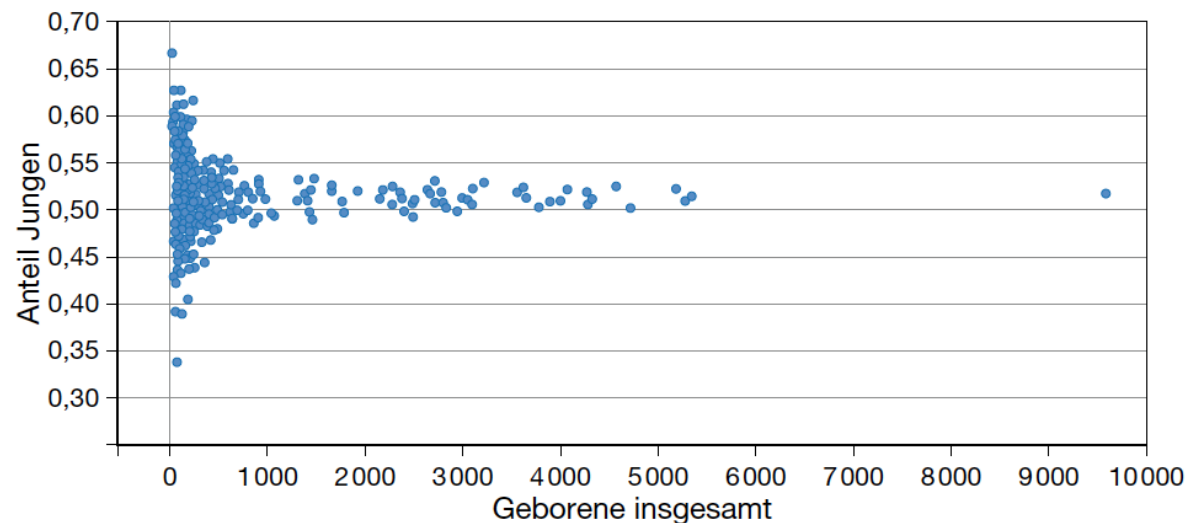


4 $1/n$ -Wurzel-aus-n-Gesetz und reale Daten



11 Anteil der Jungengeburten in NRW

Das Statistische Landesamt hat den Jungenanteil unter den Geburten in verschiedenen Städten und Landkreisen in Nordrhein-Westfalen im Jahr 2002 ermittelt. In der folgenden Abbildung ist der Anteil der Jungengeburten in einer bestimmten Stadt oder einem Landkreis auf der y-Achse und die Anzahl der in dieser Stadt (Landkreis) insgesamt Geborenen auf der x-Achse aufgetragen.



Die Punkte in der Grafik geben ausgewählte Städte und Landkreise wieder. So steht z. B. der Punkt ganz rechts für eine Stadt oder einen Landkreis mit etwa 9600 Neugeborenen und einem Jungenanteil von 0,52.

- a) Die Stadt Raesfeld hatte mit 0,337 den geringsten Jungenanteil (28 von 83 Neugeborenen). Die Ortschaft Dahlem hatte den höchsten Jungenanteil mit 0,67 (24 von 36 Neugeborenen). Wo findet man die Orte in der Grafik? Passieren hier merkwürdige Dinge?
- b) Der Anteil der Jungengeburten in NRW im Jahr 2002 betrug 0,5141. Bei welchen Neugeborenenzahlen beobachten Sie starke Abweichungen der relativen Häufigkeiten der Jungengeburten von 0,5141? Erklären Sie diese Beobachtung.

MATHEMATIK NEUE WEGE ARBEITSBUCH FÜR GYMNASIEN

Stochastik

Herausgegeben von:

Arno Lergenmüller, Prof. Günter Schmidt,
Prof. Dr. Katja Krüger

erarbeitet von:

Prof. Dr. Rolf Biehler, Kassel
Prof. Dr. Katja Krüger, Frankfurt/Main
Arno Lergenmüller, Roxheim
Prof. Günter Schmidt, Stromberg
Reimund Vehling, Hannover

unter Mitarbeit von:

Dr. Christian Fahse, Neustadt/Weinstraße
Dr. Hubert Weller, Lahnau
Martin Zacharias, Molfsee

© 2012 Bildungshaus Schulbuchverlage

Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig
www.schroedel.de

Kindergeburten in NRW 2002

NRW Kindergeburten pro Gemeinde 2002

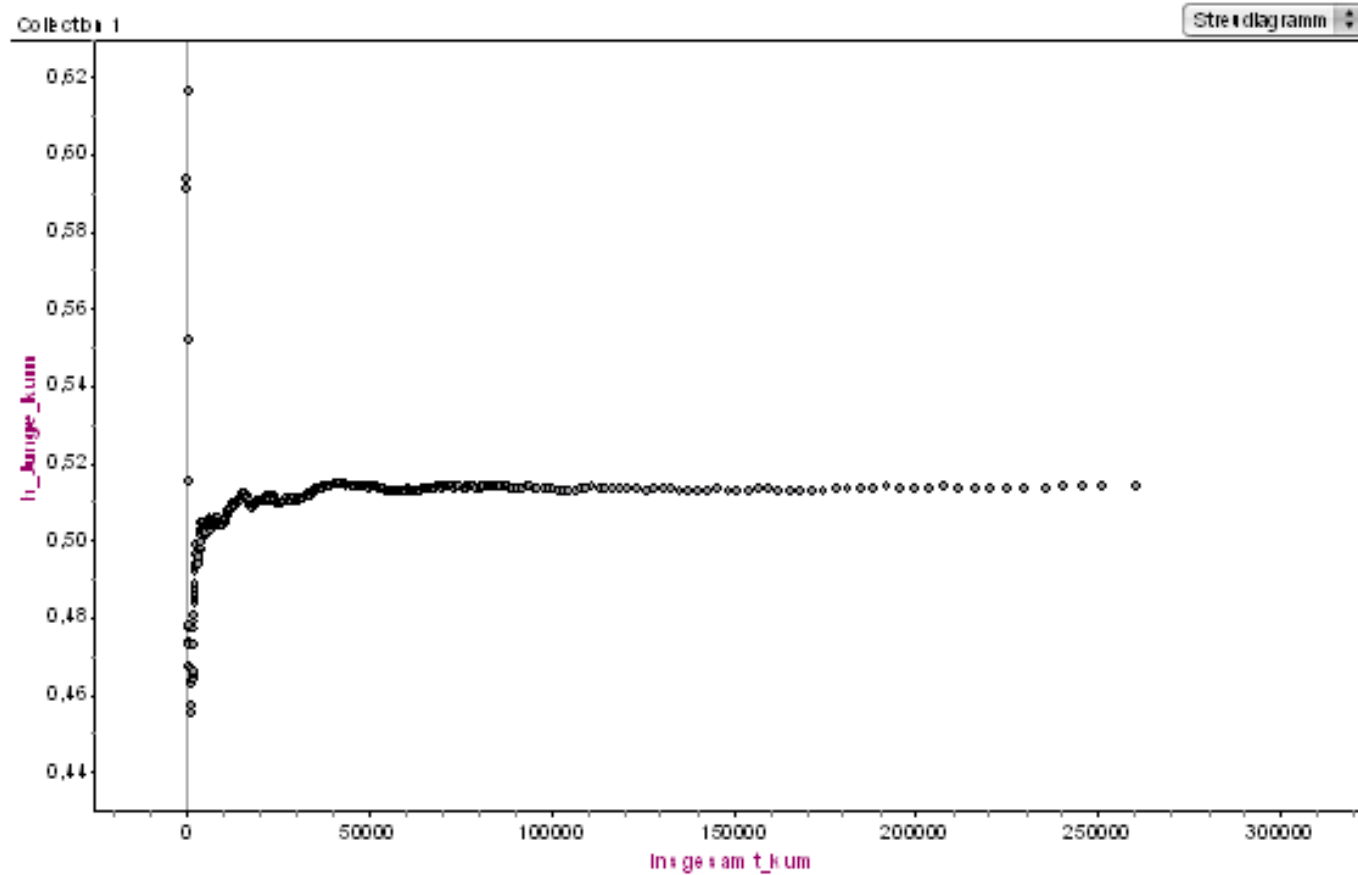
	Schlues...	Jahr	Geborene_K...	maennli...	weiblich	maennli...	insgesamt_kum	h_Junge_kum	Anteil_Jungen	Region
=						maennlich +	Geborene_Kinder + VorgängerV	$\frac{\text{maennlich_kum}}{\text{insgesamt_kum}}$	$\frac{\text{maennlich}}{\text{maennlich + weiblich}}$	
1	5358012	2002	32	19	13	19	32	0,59375	0,59375	Heimbach, Stadt
2	5366012	2002	36	24	12	43	68	0,632353	0,666667	Dahlem
3	5958020	2002	39	23	16	66	107	0,616822	0,589744	Hallenberg, Stadt
4	5962020	2002	55	28	27	94	162	0,580247	0,509091	Herscheid
5	5566032	2002	56	24	32	118	218	0,541284	0,428571	Ladbergen
6	5154048	2002	59	30	29	148	277	0,534296	0,508475	Rheurdt
7	5366032	2002	59	37	22	185	336	0,550595	0,627119	Nettersheim
8	5970012	2002	60	28	32	213	396	0,537879	0,466667	Erndtebrück

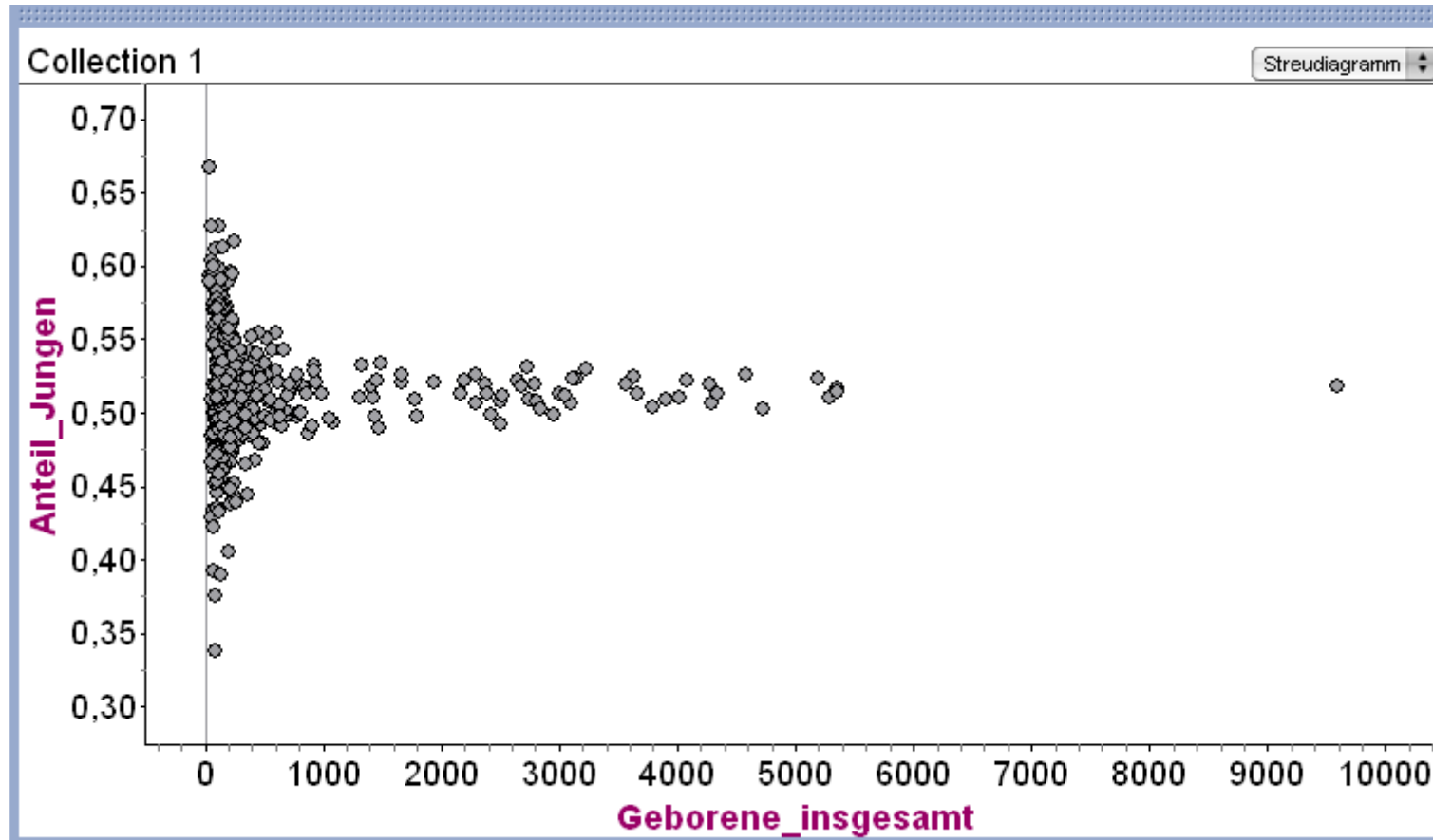
Quelle: Statistisches Landesamt

N = 427 Regionen

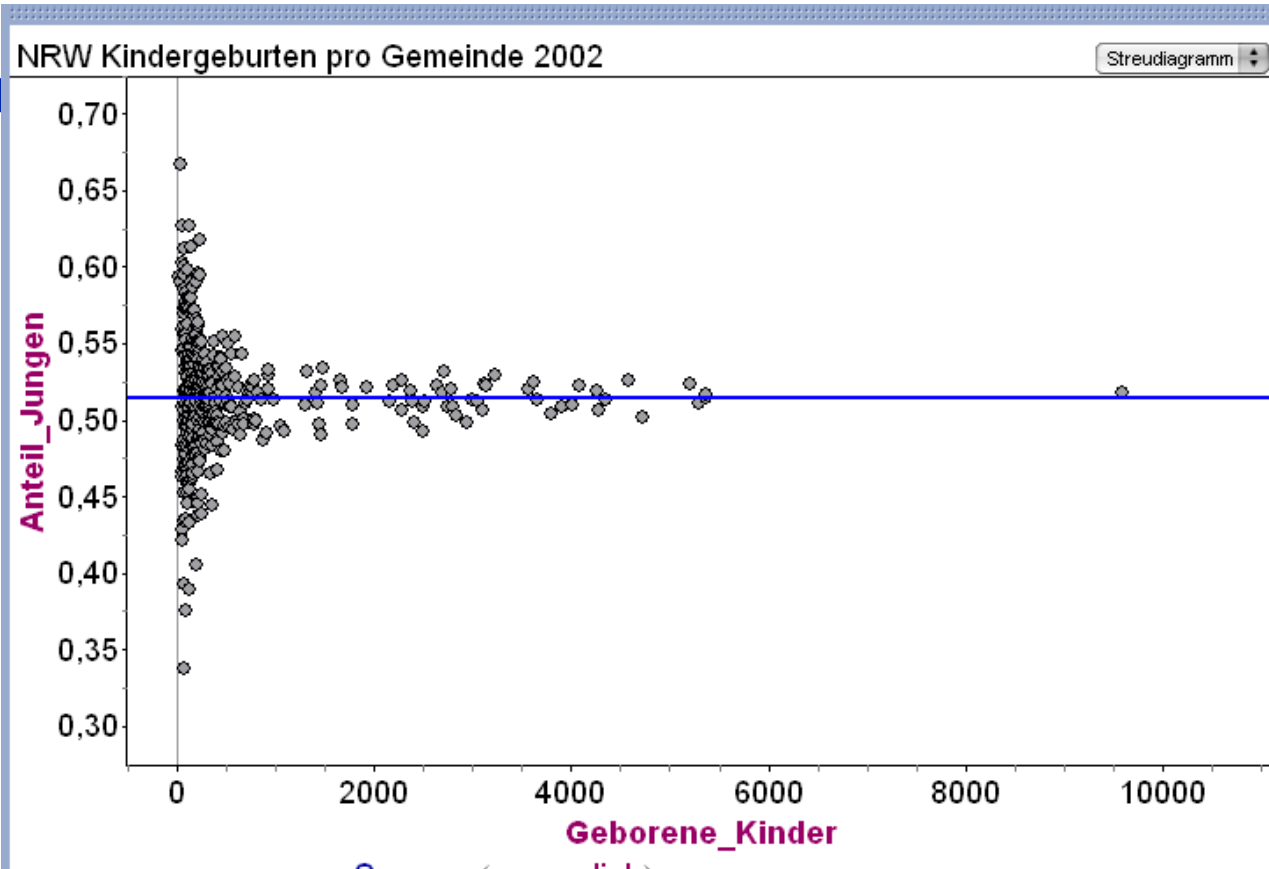
Anteil der Jungengeburt in NRW im Jahr 2002

eingesammelt nach Gemeinden mit wachsender Geburtenzahl





Jeder Punkt entspricht einer NRW Gemeinde



$$\text{Anteil_Jungen} = \frac{\text{Summe (maennlich)}}{\text{Summe (Geborene_Kinder)}}$$

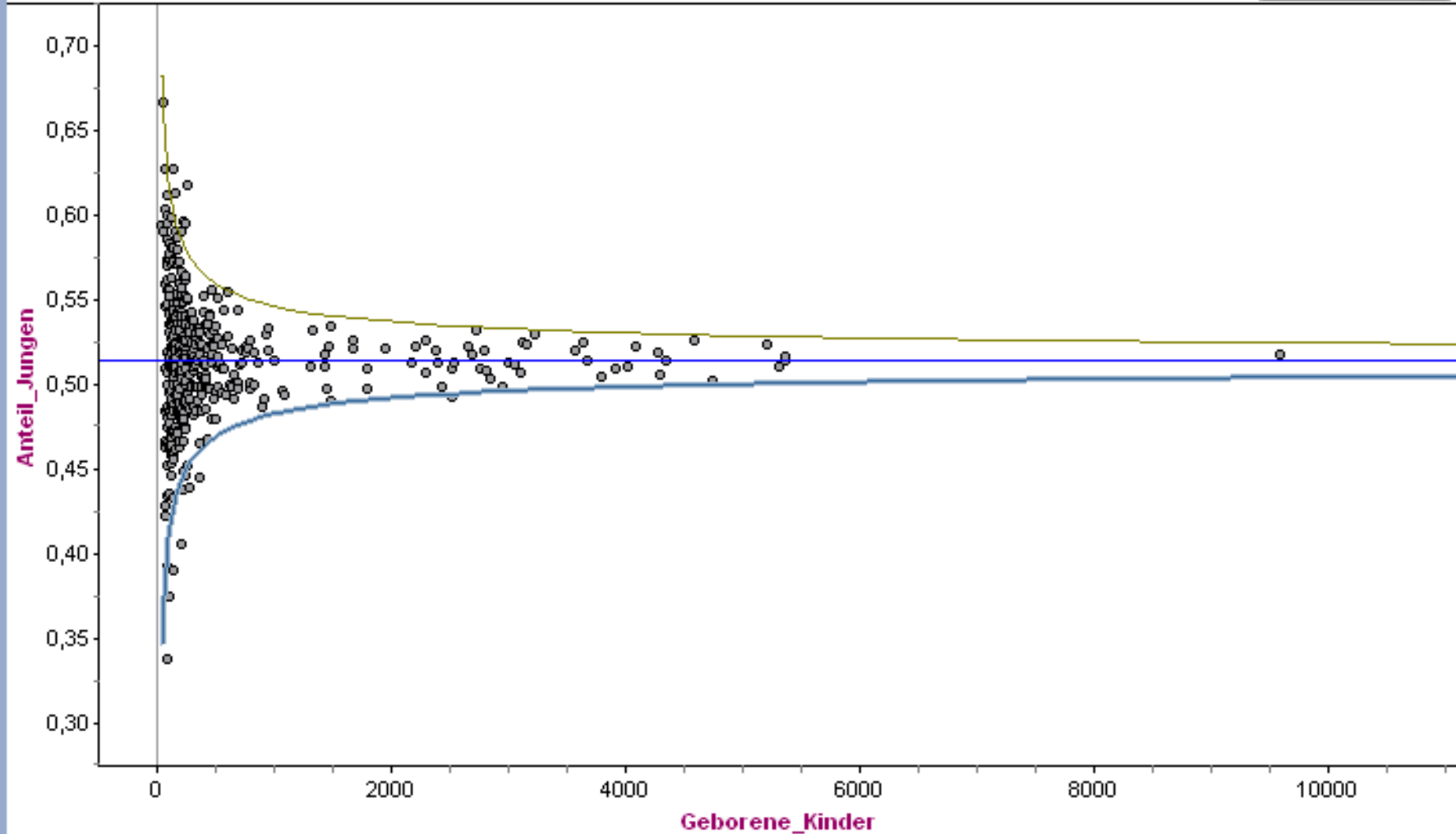
NRW Kindergeburten pro Gemeinde ...

Geborene_Kinder	0,51406296

$$S1 = \frac{\text{Summe (maennlich)}}{\text{Summe (Geborene_Kinder)}}$$

NRW Kindergeburtten pro Gemeinde 2002

Streudiagramm



— Anteil_Jungen = $\frac{\text{Summe (maennlich)}}{\text{Summe (Geborene_Kinder)}}$

— Anteil_Jungen = $\frac{\text{Summe (maennlich)}}{\text{Summe (Geborene_Kinder)}} + \frac{1}{\sqrt{\text{Geborene_Kinder}}}$

— Anteil_Jungen = $\frac{\text{Summe (maennlich)}}{\text{Summe (Geborene_Kinder)}} - \frac{1}{\sqrt{\text{Geborene_Kinder}}}$

Gliederung

- 1. Einige kurze Beispiele für modellierungsbewusstes Arbeiten aus ml 232**
 1. Übersicht
 2. Geburtsgewichte: Normalverteilt?
- 2. Implizite Annahmen: Wir drehen Glücksräder**
- 3. Bernoullikette und Binomialverteilung als Modell**
 1. Einführung
 2. ChatGPT entwickelt problematische Aufgaben
 3. Dirk Nowitzki macht in „NRW 2008 Abitur“
 4. Flugüberbuchungsaufgaben
 5. Geschlechterverteilung in Familien binomialverteilt?
- 4. 1/Wurzel-aus-n-Gesetz und reale Daten**

Kindergeburten in NRW

**Vielen Dank für Ihre
Aufmerksamkeit**

biehler@math.upb.de