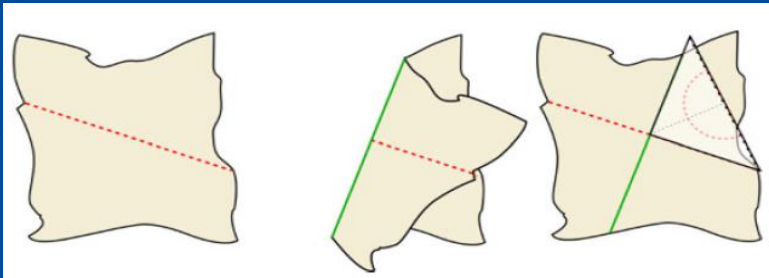


Übungsaufgaben mit Lehramtsbezug in Fachvorlesungen



$$g \neq h$$
$$s_g(h) = h$$

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

StRin Dr. Katharina Böcherer-Linder
Leitung der Abteilung für Didaktik der Mathematik
Universität Freiburg

boecherer-linder@math.uni-freiburg.de



UNI
FREIBURG



Felix Klein (1908): „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; [...]. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so nimmt er bald die althergebrachte Unterrichtstradition auf und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat.“ (Klein, 1908, S. 1)

Felix Klein (1908):

1. Diskontinuität

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; [...]. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so nimmt er bald die althergebrachte Unterrichtstradition auf und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat.“ (Klein, 1908, S. 1)

2. Diskontinuität

„Viele Lehramtsstudierende nehmen Schulmathematik und universitäre Mathematik als voneinander getrennte Welten wahr“ (Bauer & Partheil, 2009, S. 1)

Folgen der doppelten Diskontinuität



1. **Im Studium:** negative Folgen für Motivation, Interesse und Verständnis der Inhalte
2. **Im Lehrberuf:** Fachliches Wissen kann nicht für fachdidaktisches Handeln im Unterricht aktiviert werden.

Die Verbindungen *Schulmathematik* ↔ *Mathematik als Wissenschaft*
und *Fachdidaktik* ↔ *Fachwissenschaft*
stellen sich nicht von selbst ein. Es müssen die hierfür notwendigen gedanklichen Prozesse initiiert werden. (vgl. Bauer & Partheil, 2009, S. 4)

- Studierende brauchen Lerngelegenheiten, um Verbindungen herzustellen

„Schnittstellenaufgaben“



„Lehramtsaufgaben in Fachvorlesungen“:

- Fachliche Bezüge zwischen Schulmathematik und akademischer Mathematik werden adressiert (vgl. SRCK, Dreher et al., 2018)
- Fachliche Inhalte werden in Bezug zu fachdidaktischen Anforderungen gesetzt (vgl. „Job-Analyse“ nach Ball & Bass, 2004)

Umsetzung in Freiburg:

- Analysis 1 (1. Semester)
- Elementargeometrie (6. Semester)

Entwicklung der Aufgaben in Kooperation von Fach und Fachdidaktik

1. Inhaltlicher Rahmen: Elementargeometrie im Bachelorstudium, Mathematik



Beispielhafter Studienverlauf im Polyvalenten
Zwei-Hauptfächer-Bachelor-Studiengang mit Fach Mathematik (PO 2021)

Sem	Mathematik (75 Punkte + 10 Punkte Bachelor-Arbeit)			Optionsbereich (20 Punkte)		Zweites Fach (75 Punkte)
6	Elementargeometrie		Bachelor-Arbeit (oder im 2. Hauptfach)	bei Wahl der Lehramtsoption:	andernfalls:	Module nach Studienplan des zweiten Hauptfachs
5	Algebra und Zahlentheorie			Einführung in die Fachdidaktik der Mathematik		
4	Numerik II	Stochastik II	Praktische Übung	Fachdidaktik im 2. Fach (in geeignetem Semester)	Wahlmodule (in beliebigen Semestern)	
3	— Numerik — Numerik I	— Stochastik — Stochastik I	Proseminar			
2	Analysis II		Lineare Algebra II		Berufsfeld- orientierte Kompetenzen (in beliebigen Semestern)	
1	— Analysis — Analysis I		— Lineare Algebra — Lineare Algebra I	Orientierungs- praktikum Einführung in Bildungswiss.		

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Beispiele	5
1.1	Affine Geometrie	6
1.2	Projektive Geometrie	9
1.3	Sphärische Geometrie	10
1.4	Die hyperbolische Ebene	11
2	Symmetrien	13
2.1	Affine Geometrie	14
2.2	Projektive Geometrie	17
2.3	Hyperbolische Geometrie	22
3	Die Axiome der euklidischen Ebene	25
3.1	Die Zwischenrelation	25
3.2	Kongruenzen	30
3.3	Das Parallelenaxiom	32
4	Charakterisierung der euklidischen Ebene	35
4.1	Axiomatische Charakterisierung von Spiegelungen	35
4.2	Axiomatische Charakterisierung von Verschiebungen	38
4.3	Koordinatisierung	42
5	Möbiusgeometrie	49
5.1	Operation von Möbiustransformationen	49
5.1.1	Die hyperbolische Ebene als fast-euklidische Geometrie	52
6	Kongruenzsätze	55
7	Längen und Flächen	59

Vorlesung zur
Elementargeometrie
von Prof. Dr. Annette
Huber-Klawitter

Definition 4.6. Seien g, h Geraden in einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen. Die Gerade g steht senkrecht auf h genau dann, wenn $g \neq h$ und $s_g(h) = h$. Wir schreiben $g \perp h$.

Aufgabe 5 Aufgabe mit Schulbezug, (2 Bonuspunkte)

In der Schule wird das Senkrechtstehen zweier Geraden häufig durch doppeltes Falten eingeführt:

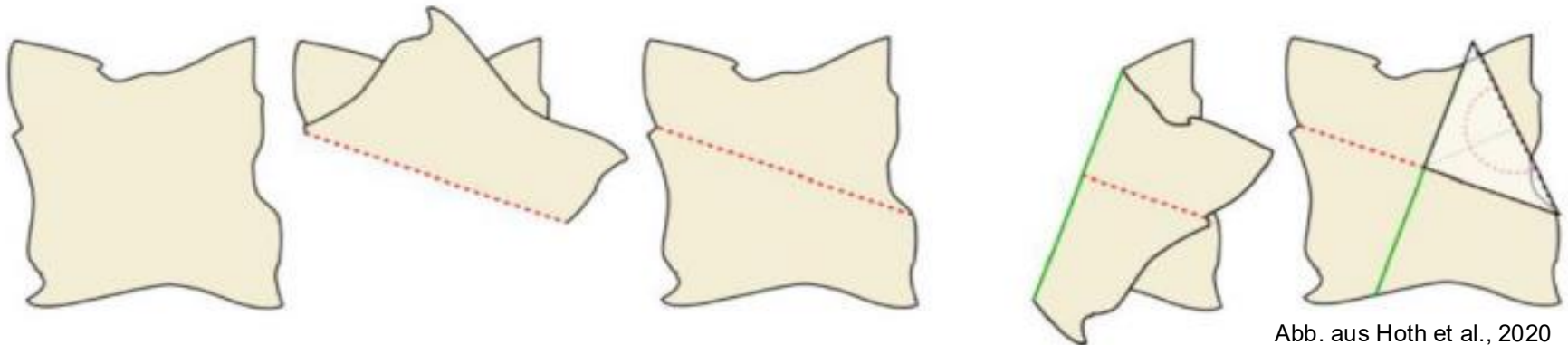


Abb. aus Hoth et al., 2020

Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der mathematischen Definition von ‘senkrecht’ aus der Vorlesung und der dargestellten Papierfaltung.

„Diese Aufgabe erlaubt es, die Distanz zwischen Studium und Schule zu überbrücken, dabei aber trotzdem die Ideen des abstrakten Konzepts beizubehalten“ (Student, SoSe 2021)

2. Beispiel: Symmetrie



Zitat aus der Vorlesung:

Wir wollen uns nun mit den *Symmetrien* der geometrischen Objekte beschäftigen, die wir eingeführt haben. Mathematisch: Wir führen den Begriff des Isomorphismus ein und studieren die Gruppe der *Automorphismen*.

Korollar 2.3. *Die Automorphismen einer Inzidenzgeometrie (X, G) , d.h. die Menge der Isomorphismen als Inzidenzgeometrie, bilden eine Gruppe.*

Aufgabe: Parkettierung

Schon in der Grundschule werden Parkettierungen genutzt, um das Erkennen von Mustern und Strukturen zu fördern (Parkette legen, Parkette weiterzeichnen, Parkette selbst erfinden, ...). Die Regelmäßigkeiten, die solchen Mustern zu Grunde liegen, lassen sich mathematisch mit Hilfe von Invarianzabbildungen beschreiben.

Frage: Welche Abbildungen lassen das nebenstehende Parkett invariant? Beschreiben Sie diese (unendlich vielen) Abbildungen möglichst systematisch.

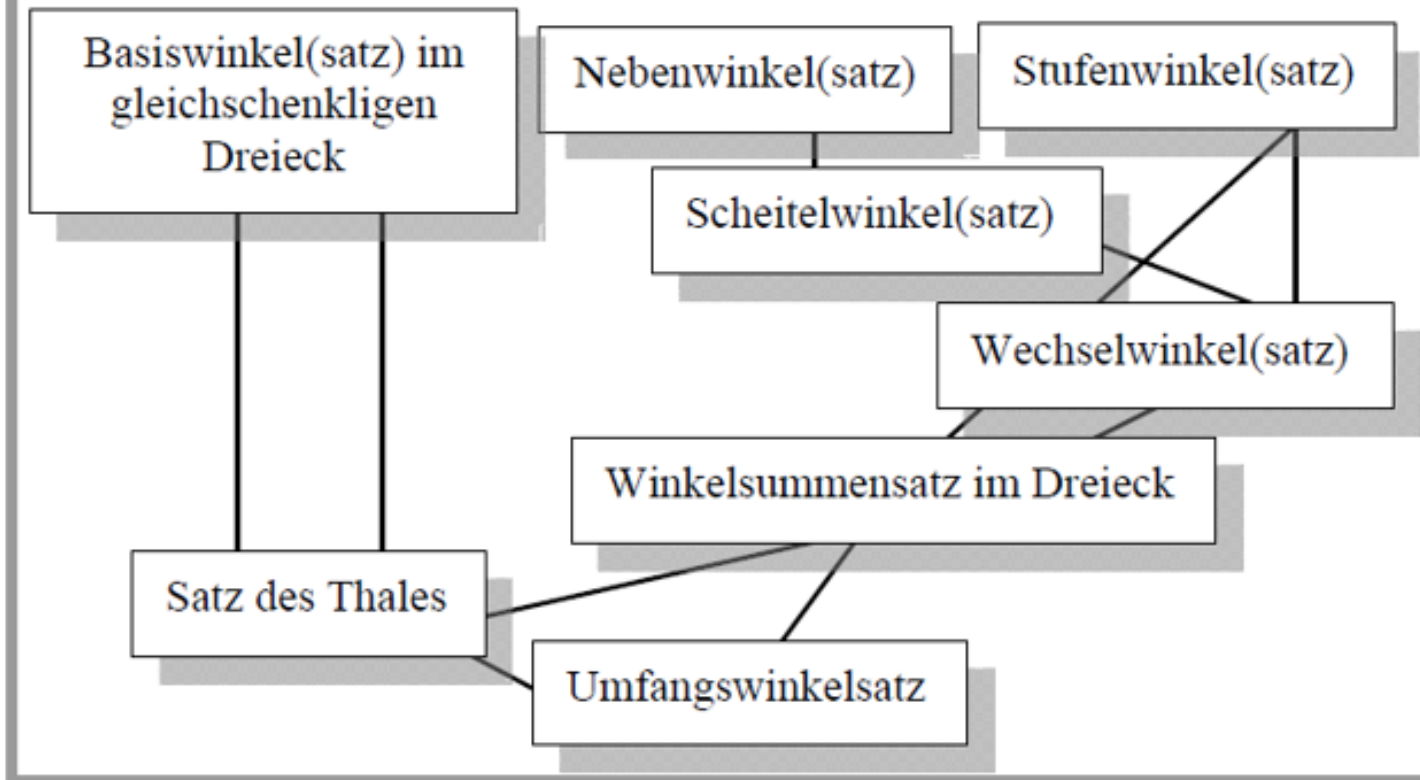


Aufgabe mit Schulbezug:

Die folgende Grafik zeigt, wie sich der Winkelsummensatz innerhalb der Schulgeometrie einordnet (Weigand et al. (2018), S. 13).

- Nennen Sie jeweils die Aussagen der aufgeführten Winkelsätze.
- Leiten Sie den Scheitelwinkelsatz aus dem Nebenwinkelsatz her.
- Leiten Sie den Satz des Thales mit Hilfe des Basiswinkelsatzes für gleichschenklige Dreiecke und des Winkelsummensatzes her.

Beispiel 9: Ordnen der Winkelsätze im Dreieck



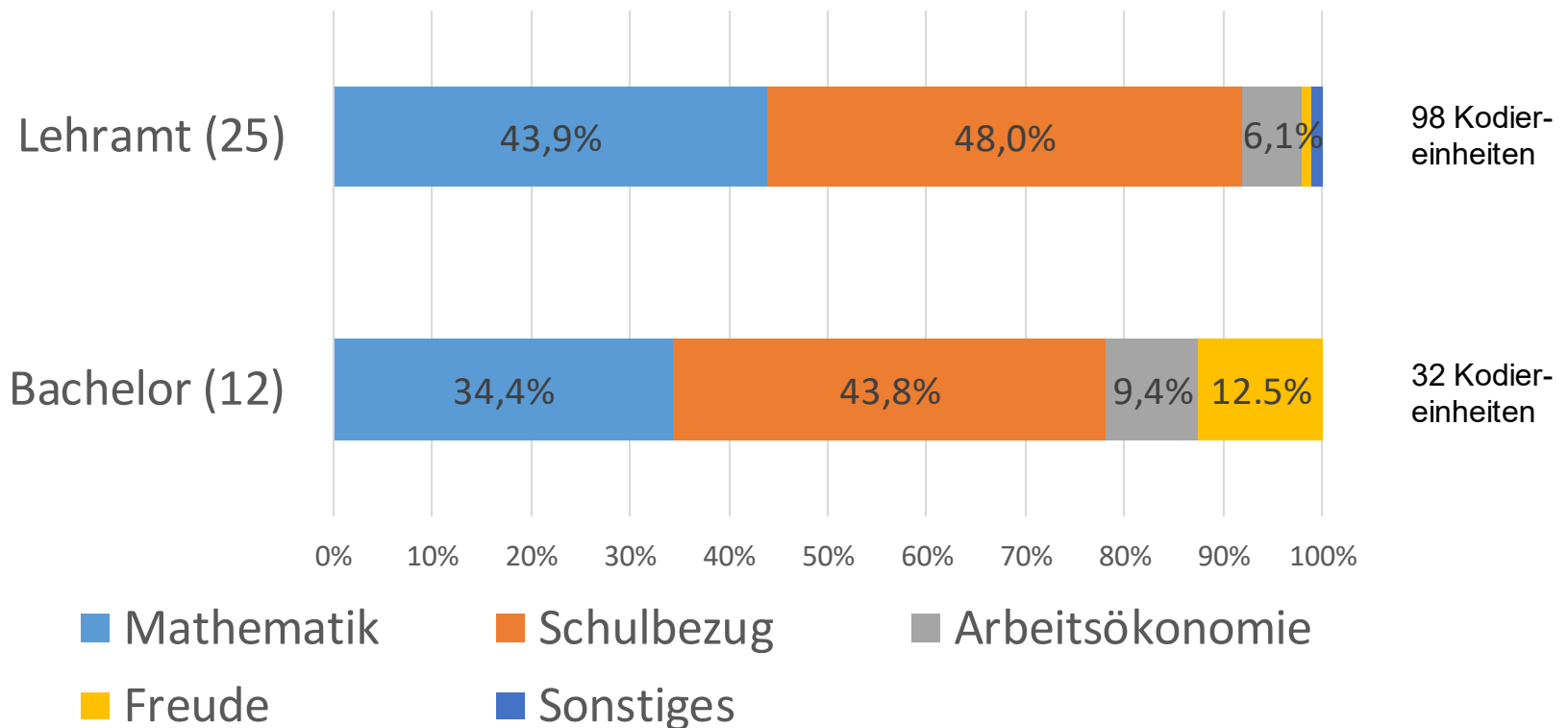
Aufgabe
zur
Vorlesung
von
Nadine
Große

Ergebnis Lehramt vs. Bachelor sc.



Welche Aufgaben fanden Sie besonders hilfreich/interessant und **warum?** ... (Befragung im SoSe 21)

Positive Bewertungen im Vergleich



Ergebnis Lehramt vs. Bachelor sc.

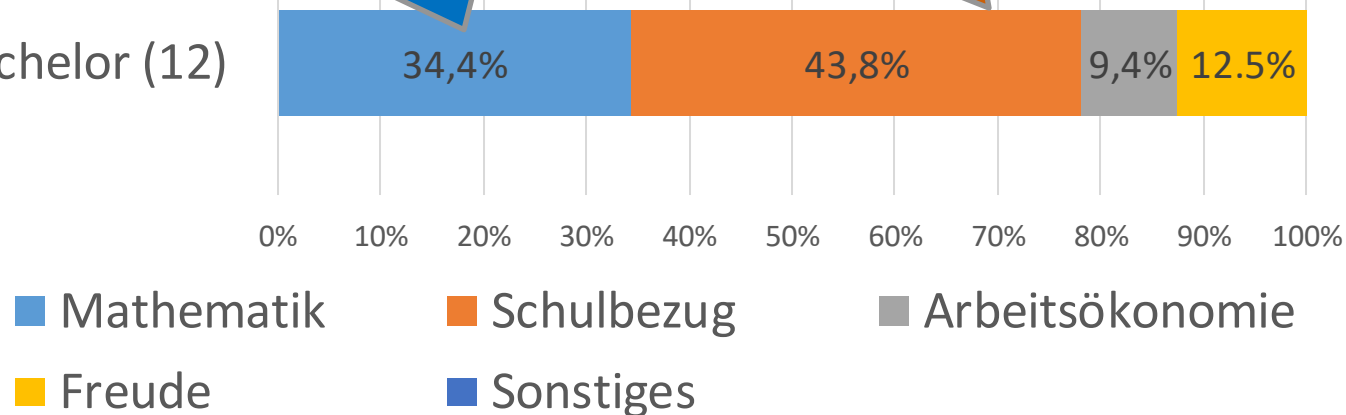


Welche Aufgaben fanden Sie bei der Vorbereitung auf das Lehramt
wichtig?

„Schulaufgaben erzwingen einen reduzierten, direkten und klaren Zugang – was auch nützlich ist, falls man nicht Lehrer werden möchte“

„Als ich damals in der Schule war, war der Begriff eines Vektors zunächst fremd. Deswegen hilft es, sich schon jetzt Gedanken darüber zu machen, wie man den Schülern genau beibringt, was ein Vektor eigentlich ist.“

Bachelor (12)



Nicht ganz unwichtige Details:



Elgeo, Annette Huber-Klawitter:

- Je eine vertiefende fachwissenschaftliche Aufgabe und eine Lehramtsaufgabe als *Bonusaufgabe* zur offenen Wahl. Klausur nur fachwissenschaftlich.

Elgeo, Nadine Große:

- Eine Lehramtsaufgabe pro Blatt *gleichwertig* zu allen anderen Aufgaben. Klausur nur fachwissenschaftlich.

Analysis 1, Michael Ruzicka:

- Je eine vertiefende fachwissenschaftliche Aufgabe und eine Lehramtsaufgabe. *Keine Wahlmöglichkeit* für die Anrechnung. Klausur nur fachwissenschaftlich.

Unendliche Reihen und periodische Dezimalzahlen:



Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Man nennt die Zahl

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

die *n-te Partialsumme* dieser Folge. Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *unendliche Reihe*

Aufgabe:

Schülerinnen und Schüler lernen in Klasse 6, dass man jeden Bruch in eine Dezimalzahl umwandeln kann, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert. Dabei entdecken sie, dass Perioden auftreten können.

- 1) Wandeln Sie nun die folgenden periodischen Dezimalzahlen wieder in Brüche um, indem Sie den Grenzwert für geometrische Reihen verwenden.

a) $0,\overline{9}$

b) $0,0\overline{48}$

c) $3,1\overline{48}$

d) $0,\overline{1234}$

Fassen Sie hierfür die periodischen Dezimalzahlen als Reihen auf. Begründen Sie, dass die Reihen konvergieren und rechnen sie jeweils den Grenzwert aus.

- 2) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Umwandlung von periodischen Dezimalzahlen in Brüche, das nur mit „Schulmathematik“ auskommt, und führen Sie dies an den Beispielen von 1) durch.

Grenzprozesse verstehen:



Aufgabe mit Schulbezug:

Der Bildungsplan Mathematik für das Gymnasium in Baden-Württemberg sieht vor, dass Schülerinnen und Schüler „uneigentliche Integrale untersuchen“ können (S. 43, Fassung vom 29.02.2024).

Max erzählt: „Heute hatten wir in Mathe uneigentliche Integrale. Zuerst habe ich mich gewundert: Man integriert unendlich weit und trotzdem kommt als Flächeninhalt unter der Kurve eine feste Zahl raus. Dann ist mir aber selbst ein gutes Beispiel eingefallen: Ich habe mich daran erinnert, dass man ja den orientierten Flächeninhalt nehmen muss, d.h. Flächenstücke unterhalb der x-Achse sind dann negativ. Dann ist ja klar, dass z.B. $\int_0^{\infty} \sin(x) dx = 0$ sein muss, denn man hat ja unterhalb der x-Achse genau gleich viel Fläche wie oberhalb der x-Achse, also ist der Flächeninhalt insgesamt gleich 0“.

Nehmen Sie zu dieser Schüleräußerung mathematisch fundiert Stellung.

Richtige Antwort:

(3) Der Grenzwert existiert in der Tat nicht. Würde er nämlich existieren, dann könnte man ihn mit jeder Folge (b_n) , die gegen ∞ geht, berechnen, also auch mit $(b_n) = (n\pi)$. Die Folge der Integrale $\int_0^{b_n} \sin(x) dx$ ist aber $(2, 0, 2, 0, \dots)$ und konvergiert daher nicht.

Weitergehende Hinweise:

Es ist ein bekannter Irrtum, dass man uneigentliche Integrale dadurch untersuchen könne, dass man die obere Grenze „irgendwie“ gegen unendlich gehen lässt. Wie diese Aufgabe zeigt, ist das aber nicht richtig. Der Irrtum hat im Grunde gar nichts mit Integrationstheorie zu tun, sondern eher mit Grenzwerttheorie: Um $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ zu untersuchen, muss man *alle* Folgen betrachten, die gegen unendlich gehen.

- ...können Lehramtsstudierende motivieren und für die Inhalte interessieren.
- ...machen deutlich, dass man für die Schule ein fachliches Fundament braucht.
- ...bieten konkrete, anschauliche Zugänge zu abstrakten Inhalten.
- ...müssen gut auf die Inhalte der Fachvorlesung abgestimmt sein.