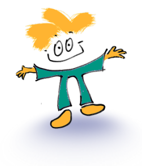
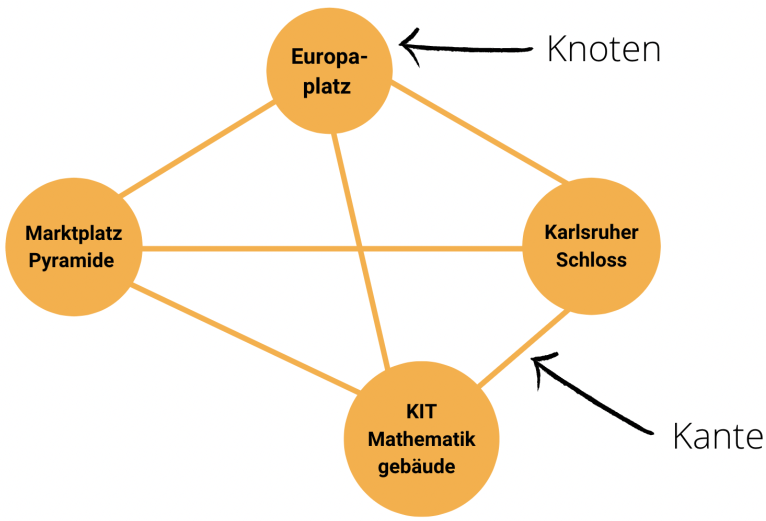
Graphentheorie

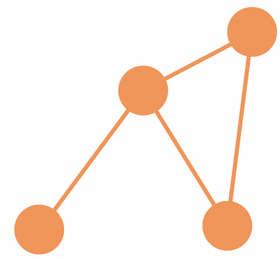


Graphen sind eine grafische Darstellung von Objekten und deren Beziehungen. Die Objekte sind dabei Punkte und werden als Knoten bezeichnet, diese können zum Beispiel Objekte wie Zahlen oder auch Namen sein. Die Beziehungen sind die Linien zwischen diesen Knoten und werden als Kanten bezeichnet. Die Anzahl der ausgehenden Kanten von einem Knoten heißt Grad des Knotens.
Ein Beispiel für einen Graphen siehst du hier:



Der Graph hat vier Knoten, welche vier Sehenswürdigkeiten in Karlsruhe darstellen. Du kannst zu Fuß von jedem Knoten aus einen anderen Knoten erreichen, diese Beziehung ist hier jeweils als eine Kante des Graphen dargestellt. Insgesamt hat der Graph sechs Kanten. Der Grad jedes Knotens ist drei, das heißt du kannst von jeder Sehenswürdigkeit aus drei andere zu Fuß erreichen.

Verstanden? Überprüfe dich!
Wie viele Knoten und Kanten hat der abgebildete Graph? Was ist der Grad der Knoten? Schreibe den Grad neben den jeweiligen Knoten.



Anzahl Knoten: ____________

Anzahl Kanten: ____________

Aufgabe:

a) Zeichne einen Graph mit 2 Knoten mit Grad 1 und 3.

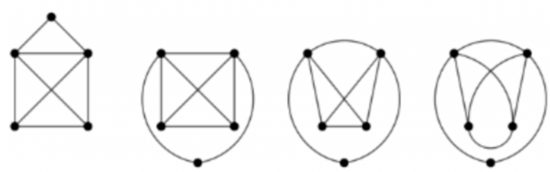
b) Zeichne einen Graph mit 5 Knoten mit Grad 1,1,1,2,3.

c) Zeichne zwei verschiedene Graphen mit 6 Knoten, wovon vier den Grad 2 und zwei den Grad 3 haben.

d) Erkennst du einen Zusammenhang zwischen der Summe aller Kantengrade und der Anzahl der Kanten eines Graphen?

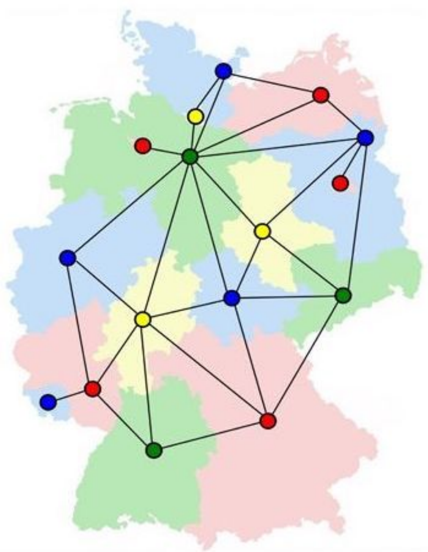
e) Warum kann es keinen Graph mit 2 Knoten mit Grad 1 und 2 geben?

Hinweis: Kanten dürfen auch gebogen sein! Dafür ist das „Haus des Nikolaus“ ein gutes Beispiel: All diese Graphen sind mathematisch betrachtet die selben!

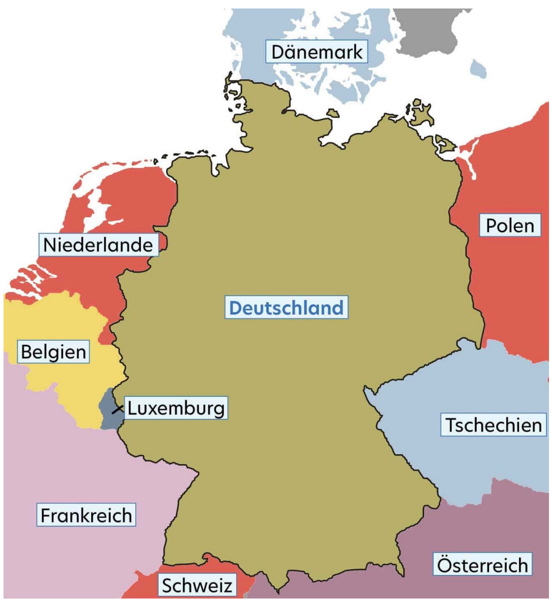


LANDKARTEN ALS GRAPHEN

Bei der Darstellung von Landkarten als Graphen werden die Länder als Knoten modelliert und die gemeinsamen Grenzen zweier Länder als Kanten. Folgendes Beispiel zeigt die Bundesländer von Deutschland auf einer Karte und darüber gelegt der dazugehörige Graph.



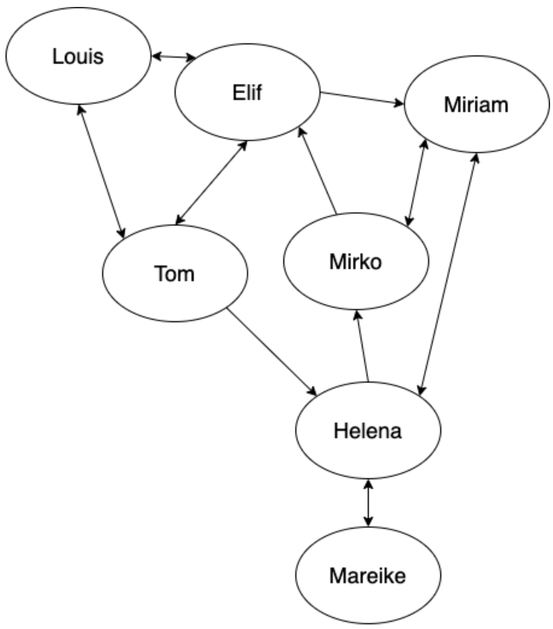
Aufgabe: Stelle Deutschland und seine Nachbarländer in einem Graph dar!



FREUNDSCHAFTSGRAPHEN

Auch Freundschaftsbeziehungen können als Graph dargestellt werden. Die Knoten sind die Personen und die Kanten sind die Beziehungen. Da Freundschaften nicht immer beidseitig sind, können sogar gerichtete Graphen verwendet werden. Besteht also eine beidseitige Freundschaft zwischen zwei Personen, so gibt es einen Pfeil, der in beide Richtungen zeigt. Ein Pfeil von Person A zu Person B bedeutet, dass Person A zwar B mag, umgekehrt jedoch nicht. Keine Kante bedeutet, dass zwischen diesen Personen keine Freundschaftsbeziehung besteht.

Aufgabe: Beschreibe die Freundschaftsbeziehungen, die in folgendem Graphen dargestellt sind in Worten.



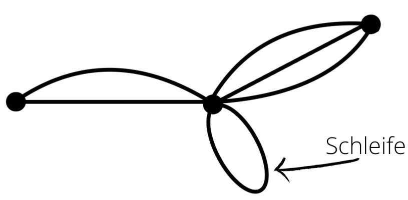
Graphentheorie

Karlsruher Institut für Technologie

Auf dem vorherigen Arbeitsblatt zu den Freundschaftsgraphen hast du die gerichteten Graphen kennengelernt: Bei einem gerichteten Graph kann man mit einer Kante nur in eine Richtung gehen. Die Kante wird dabei durch einen Pfeil dargestellt.

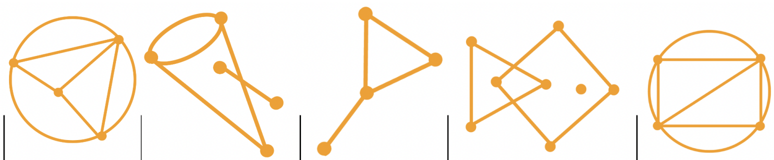
Graphen, bei denen zwei Knoten mit mehreren Kanten verbunden sind, werden Multigraphen genannt. Auch Kanten die einen Knoten mit sich selbst verbinden, sind erlaubt und werden Schleifen genannt.

Ein Graph ohne solche Schleifen und ohne Mehrfachkanten wird einfacher Graph genannt.



Gibt es bei einen Graphen von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten einen Kantenzug, der die beiden verbindet, so handelt es sich um einen zusammenhängenden Graph. Ist das nicht der Fall, so kann man den Graphen in Komponenten (Teilgraphen) aufspalten, die keine Verbindung besitzen.

Verstanden? Überprüfe dich!
Kreuze an, bei welchen Graphen es sich um Multigraphen und/ oder zusammenhängende Graphen handelt!

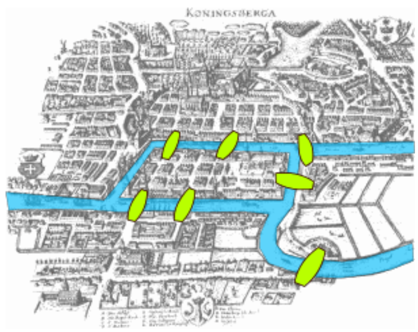


Multigraph					
zusammen-hängend					

Zusatz: Wie viele einfache Graphen mit 2 (3) Ecken gibt es? Zeichne sie.

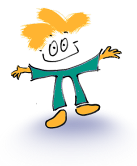
DAS KÖNIGSBERGER BRÜCKENPROBLEM

Königsberg war bis 1945 die Hauptstadt der preußischen Provinz Ostpreußen. Die Stadt wird durch den Fluss Pregel und seine beiden Inseln geteilt. Die beiden Stadthälften waren durch je drei Brücken mit den Inseln verbunden, die untereinander durch eine weitere Brücke verbudenden waren. Es stellte sich im frühen 18. Jahrhundert die Frage, ob es einen Weg gibt, bei dem alle Brücken genau einmal einmal überquert werden und wenn ja, ob auch ein Rundweg möglichst ist, bei dem man wieder zum Anfangspunkt gelangt.



Aufgabe: Aufgabe Modelliere das Königsberger Brückenproblem als Graph: aus den Brücken werden Kanten und aus den Stadtteilen Knoten. Gibt es einen Rundweg, bei dem alle Brücken der Stadt genau einmal überquert werden und man wieder zum Ausgangspunkt zurückgelangt?

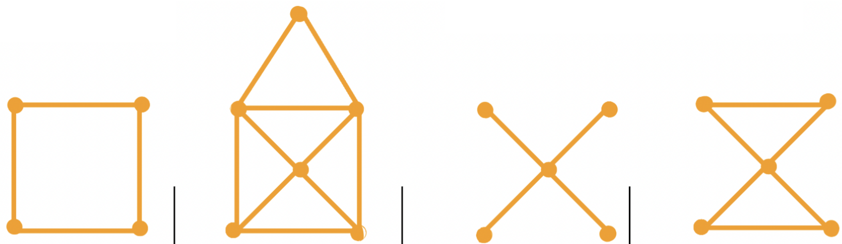
Graphentheorie



Einen solchen Rundgang, wie beim Königsberger Brückenproblem gesucht, bezeichnet man in der Mathematik als geschlossenen Eulerweg oder auch Eulertour. Es handelt sich um einen geschlossenen Weg durch einen Graphen, bei dem jede Kante genau einmal durchlaufen wird und man wieder am Anfangspunkt ankommt. Einen solchen Weg gibt es genau dann, wenn es sich um einen zusammenhängenden Graphen handelt und jeder Knoten geraden Grad hat (damit man jedes Gebiet, das man über eine Brücke erreicht, über eine andere Brücke auch wieder verlassen kann). Ein Graph heißt Eulergraph, wenn er mindestens einen geschlossenen Eulerweg hat.

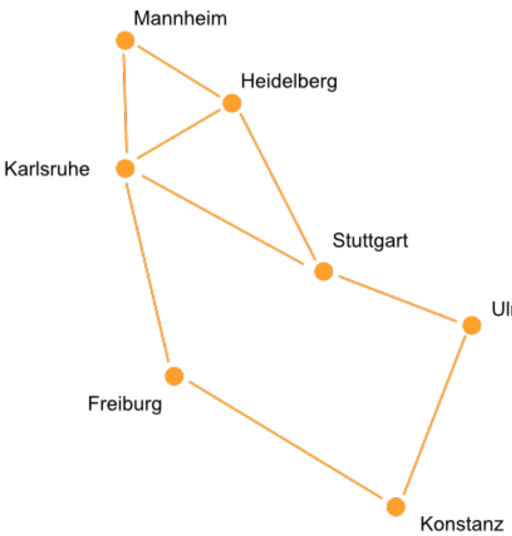
Einen Kreis, der alle Knoten eines Graphen genau einmal enthält nennt man Hamilton-Kreis. Er muss dabei aber nicht alle Kanten des Graphen enthalten. Ein Beispiel dafür ist eine Finde Reiseroute, die durch jede Stadt genau einmal führt und in derselben Stadt beginnt und endet. Ein Graph heißt Hamiltongraph, wenn er mindestens einen Hamilton-Kreis enthält.

Verstanden? Überprüfe dich!
Handelt es sich bei den Graphen um einen Euler- und/oder Hamiltongraphen? Fülle die Tabelle aus (✓oder X).



Eulergraph				
Hamilton-graph				

Aufgabe: Findest du einen Rundweg (Hamiltonkreis) durch alle Städte? Falls ja, gib die Route an.



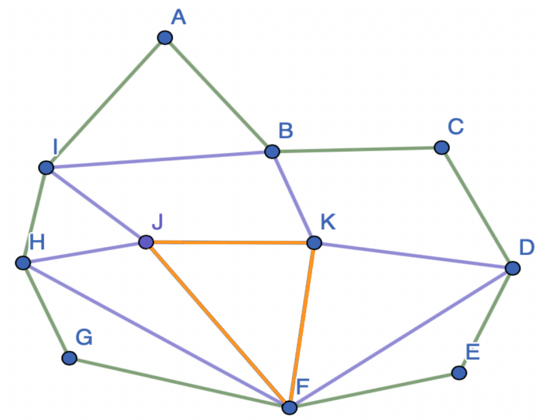
Graphentheorie

EULERTOUR FNDEN - ZWIEBELSCHALENALGORITHMUS

Um eine Eulertour zu finden gibt es ein schrittweises Vorgehen - den Zwiebelschalenalgorithmus. Wie bei einer Zwiebel geht man dafür schichtweise von außen nach innen vor.

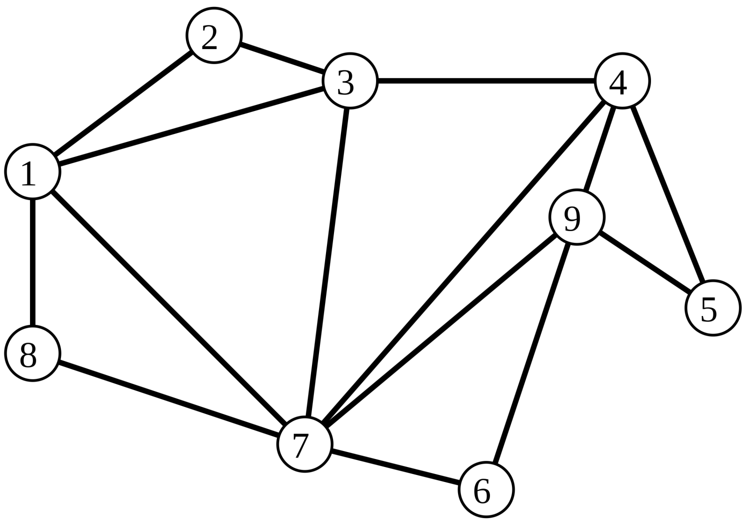
Anleitung:

1. Beginne bei einem beliebigen Knoten und umrande den Graphen.
2. Beginne bei einem nächsten Knoten und gehe entlang noch unmarkierter Kanten einen nächst kleineren Kreis entlang.
3. Wiederhole Schritt 2, bis alle Kanten markiert sind.
4. Verbinde alle einzelnen Kreise zu einer Eulertour: Gehe entlang des ersten Kreises, bis er einen neuen inneren Kreis berührt. Folge dem neuen Kreis, bis dieser wieder einen neuen inneren berührt, usw...Wenn du im inneren Kreis angekommen bist, gehe diesen bis zum Ende entlang. Von dort gehst du wieder in den nächst größeren Kreis und läufst diesen bis zum Ende usw., bis du wieder ganz außen angekommen bist. Am Ende kommst du am Startpunkt raus und alle Kanten sollten markiert sein.

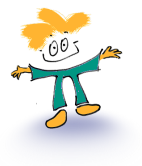


- Schritt 1: Wähle A als Start. Folge dem grünen Kreis (A-B-C-D-E-F-G-H-I-A)
- Schritt 2: Wähle B als Start. Folge dem lila Kreis (B-K-D-F-H-J-I-B)
- Schritt 3: Wähle K als Start. Folge dem orangenen Kreis (K-F-J-K)
- Schritt 4: Verbinde die drei Kreise zu einem großen. Die Eulertour ist nun der Kreis (A-B-K-F-J-K-D-F-H-J-I-B-C-D-E-F-G-H-I-A)

Aufgabe: Zeichne mit Hilfe des Zwiebelschalenalgorithmus in folgendem Graph eine Eulertour ein. Schreibe danach deine gefundene Eulertour mit Hilfe der Zahlen in den Knoten auf.



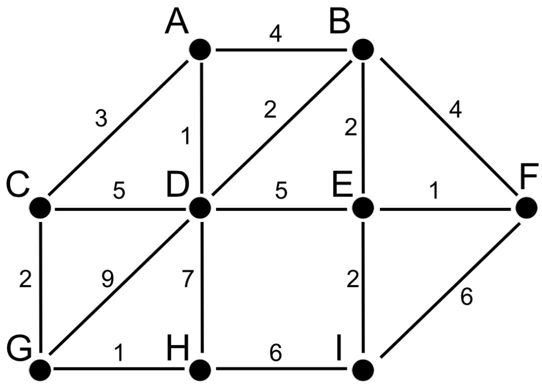
Graphentheorie



GEWICHTETE GRAPHEN

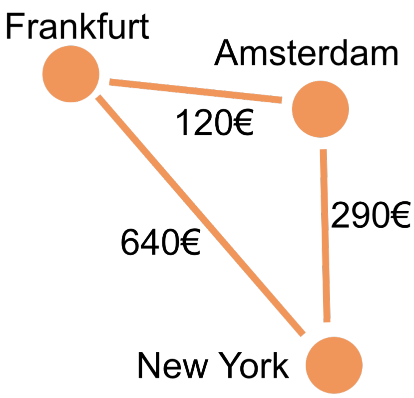
Für verschiedene reale Anwendungen kann es wichtig sein, die Kanten eines Graphen genauer zu beschreiben. Zum Beispiel ist es interessant zu untersuchen, wie lang eine Strecke im Vergleich zu einer anderen ist. Dies kann man in einem Graph darstellen, indem man die Kanten beschriftet. Diese Beschriftung wird als Kantengewicht bezeichnet. Ein Graph mit Kantengewichten wird als gewichteter Graph bezeichnet.

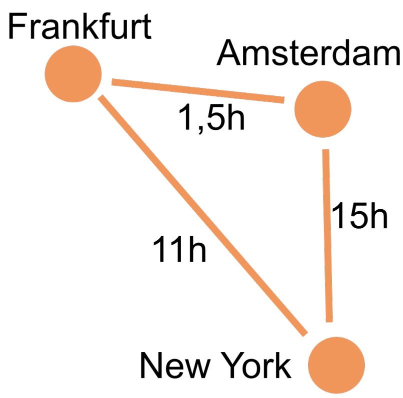
Beispiel:



Anwendung:
Zum Beispiel für die Routenplanung ist es wichtig die Kantengewichte zu betrachten: Meist sollen Routen entweder so wenige Kilometer wie möglich oder eine so kurze Zeit wie möglich brauchen! Interpretiert man die Gewichte im Graphen links als Kilometer interpretiert, so ist der kürzeste Weg von C zu I der Weg C-G-H-I mit einer Gesamtstrecke von 9km. Der C-D-E-I zum Beispiel wäre 12km lang.

Aufgabe: Wie kannst du den Sachverhalt, der in folgenden beiden Graphen dargestellt ist in Worten beschreiben?



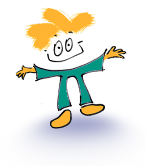


GRAPHENTHEORETISCHE PROBLEME

Viele reale Probleme lassen sich mit Hilfe der Graphentheorie lösen:

- Postbotenproblem: Alle Straßen sollen durchlaufen werden
  - mathematisches Ziel: Eulertour finden = alle Kanten auf minimalem Gesamtweg durchlaufen
  - Lösungsstrategie: Zwiebelschalenalgorithmus oder Fleury Algorithmus
  - vergleichbare Probleme: Route der Müllabfuhr
- Optimale Schienenverlegung: alle Haltestellen sollen mit so wenig Strecke wie möglich erreicht werden
  - mathematisches Ziel: Minimalen Spannbaun für zusammenhängenden Graphen finden = alle Knoten, aber nicht zwingend alle Kanten
  - Lösungsstrategie: Algorithmus von Kruskal
  - vergleichbare Probleme: Wasser-/Strom-/Telefonnetz (alle Haushalte sollen erreicht werden)
- Routenplanung: Der kürzeste Weg von A nach B soll gefunden werden
  - mathematisches Ziel: Spannbaum finden, dass vom Start alle Ziele auf kürzesten Weg erreicht werden
  - Lösungsstrategie: Algorithmus von Dijkstra
- Travelling Salesman (Problem des Handlungsreisenden): Besuch mehrerer Orte, bei der keine Station außer der ersten mehr als einmal besucht wird, die gesamte Reisestrecke möglichst kurz und die erste Station gleich der letzten Station ist.
  - mathematisches Ziel: Hamiltonkreis finden (Rundtour, die jede Ecke genau einmal trifft), wobei die Summe der Kantengewichte minimal ist.
  - Lösungsstrategie: Ausprobieren! Es wurde noch kein allgemeiner Algorithmus gefunden!

Graphentheorie

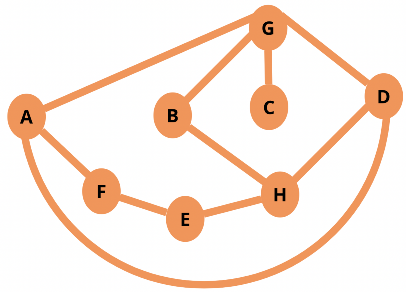


FÄRBEN VON GRAPHEN

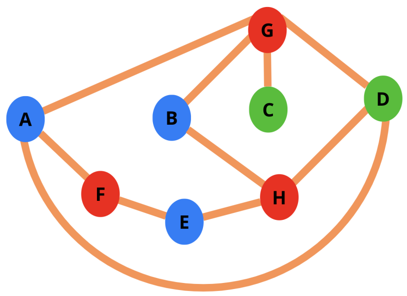
Reales Problem: Bei einer Klassenfahrt sind Zimmer zu verteilen. Dabei ist zu berücksichtigen:

- Gitta mag nicht zu Anna, Berta, Conny, Diana.
- Anna mag nicht zu Diana, Fiona.
- Helga mag nicht zu Berta, Diana, Emma.
- Emma mag nicht zu Fiona.

Gesucht ist Zimmeraufteilung ohne Konfliktpotential. Wie viele Zimmer werden für die Mädchen benötigt?
Mathematisches Modell: Personen als Ecken, Konflikte als Kanten



Färbe Ecken, sodass benachbarte Ecken unterschiedliche Farbe haben. Das bedeutet, dass Personen, die miteinander einen Konflikt haben nicht im selben Zimmer schlafen!

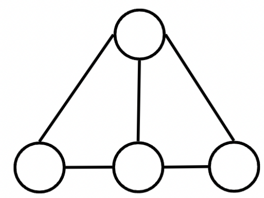


Es werden mindestens drei verschiedene Zimmer benötigt. Jede Farbe repräsentiert ein Zimmer! Eine mögliche Zimmeraufteilung ist:

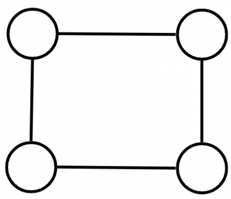
- Zimmer 1: Gitta, Helga, Fiona
- Zimmer 2: Anna, Berta, Emma
- Zimmer 3: Conny, Diana

Aufgabe: Färbe die Graphen mit so wenig Farben wie nötig. Knoten die nebeneinander liegen, also eine gemeinsame Kante besitzen, dürften nicht dieselbe Farbe haben.

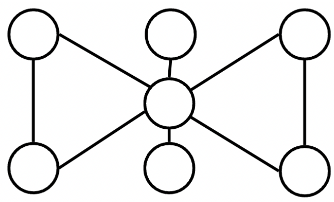
a.)



b.)



c.)



Aufgabe für Fortgeschrittene: Der Rektor des Euler-Gymnasiums in Graphenstadt soll die sieben Arbeitsgemeinschaften der Schule, die immer um 14:00 Uhr beginnen, so auf vier Nachmittage verteilen, dass jeder Interessent seine AG besuchen kann. Einige Personen haben mehrere AGs gewählt. Ist eine Aufteilung der AGs auf vier Nachmittage möglich, sodass alle an ihren Wahl-AGs teilnehmen können? Erstelle einen passenden Graphen. Versuche mit Hilfe von einer Färbung eine passende Einteilung der AGs zu finden.