Verstehen im Kalkül

Guido Pinkernell ∘ Pädagogische Hochschule Heidelberg
Algebra in der Schule ∘ 4. Karlsruher Didaktik Workshop ∘ KIT ∘ 21. Februar 2025

Aspects of Proficiency in School Algebra

acting

transformational types of activities (Kieran 2004)

generational types of activities (Kieran 2004)

structuring

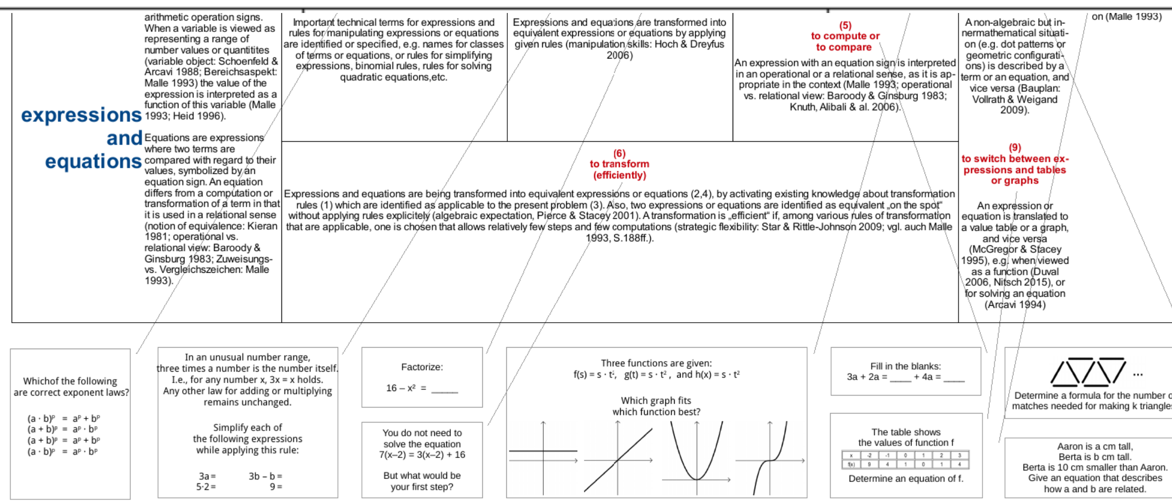
transforming

interpreting

to transform an algebraic expression into an equivalent expression of different structure (transformational equivalence: Musgrave et al. 2005; treatment: Duval 2006)

to transform or interpret an algebraic expression while maintaining its structure (substitutional equivalence: Musgrave et al. 2005; Rüede 2015)

to describe a non-algebraic situation by formal algebra and vice versa (conversion: Duval 2006)

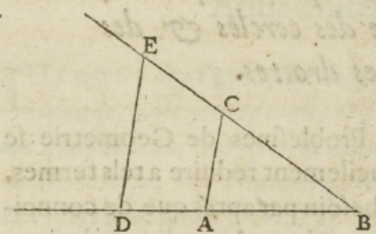


Pinkernell, G., & Düsi, C. (2016). Aspects of Proficiency in School Algebra

Verstehen im Kalkül

Al-Chwarizmi - Bodleian Libraries, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=43327479

La Multi-
plication.



Soit par exemple
A B l'vnité, & qu'il fail-
le multiplier B D par
B C, ie n'ay qu'a ioindre
les poins
rer D E p
& B E eſt
cete Mul

Descartes (1637): Discours de la methode.
Source gallica.bnf.fr / Bibliotheque nationale de France.
http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb30328384x

tion, en tous par vne meſme, Et que lorſque cete equa-
tion ne monte que iuſques au rectangle de deux quanti-
tés indeterminées, oubien au quarré d'vne meſme, la li-
gne courbe eſt du premier & plus ſimple genre, dans le-
quel il ny a que le cercle, la parabole, l'hyperbole, &
l'Ellipſe qui ſoient compriſes. mais que lorſque l'equa-
tion monte iuſques a la trois ou quatrieſme dimenſion
des deux, ou de l'vne des deux quantités indeterminées,
car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'vn
point a vn autre, elle eſt du ſecond: & que lorſque l'equa-
tion monte iuſques a la 5 ou ſixieſme dimenſion, elle
eſt du troiſieſme; & ainſi des autres a l'infini.

$$a = a$$

$$a = b$$

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung.

$$x^2 – 4x + 3 = x^2 – 4x + 3$$

$$a = b$$

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung.

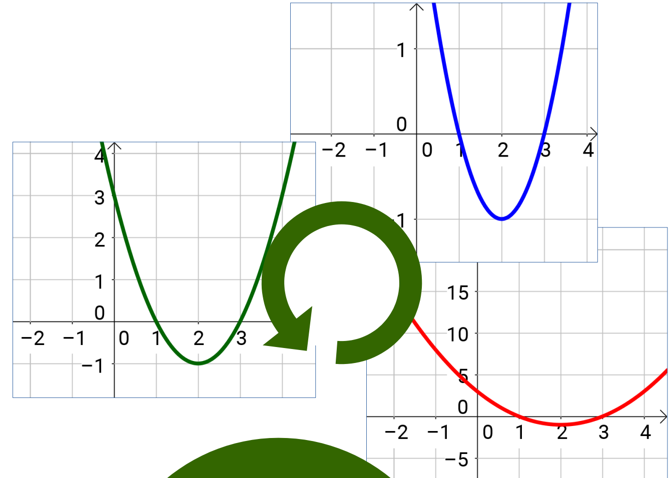
$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung.

$$x^2 – 4x + 3 = (x–3)(x–1)$$

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung.



$f(x) = (x-2)^2-$

$f(x) = (x-3)(x-1)$

$f(x) = x^2-4x+3$

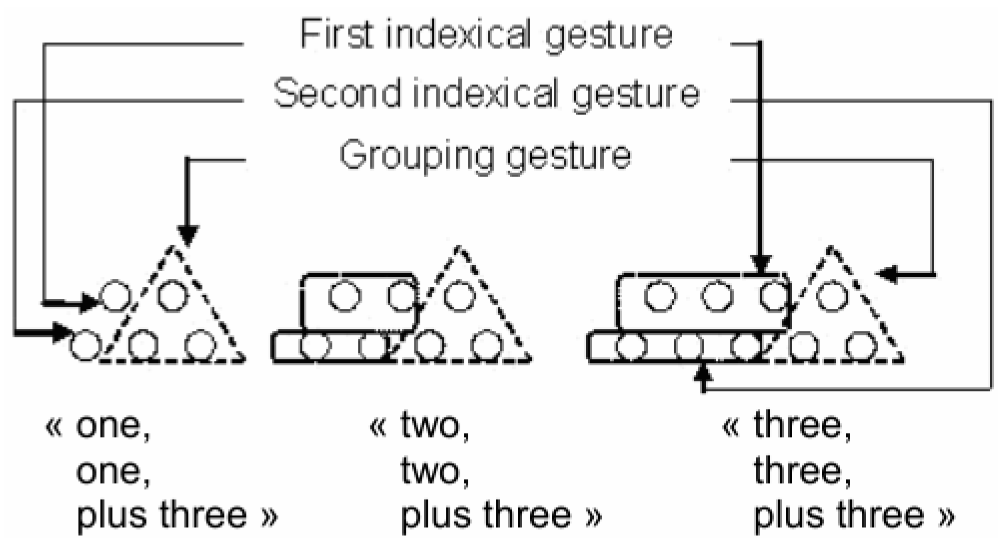
x	f(x)
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0

x	f(x)
0	3
0.5	1.25
1	0
1.5	-0.75
2	-1

x	f(x)
3	0
-1	8
20	323
1.5	-0.75
1.6	-0.84

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung ∘ Duval (2017). Understanding the Mathematical Wa

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung ∘ Duval (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking ∘ Radford (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs



Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung ◦ Duval (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking ◦ Radford (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs

• historische Perspektive	die Formelsprache als „Register“ mathematischer Erkenntnis
• semiotische Perspektive	Erweiterung der „Register“ auf numerische, geometrische, sprachliche, gestische Zeichen(systeme)

Verstehen im Kalkül

conceptual

rich in relationships […] that pervade the individual facts and propositions so that all pieces of information are linked to some network

procedural

rules or procedures for solving mathematical problems

Hiebert und Lefevre (1986): Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis ∘ Skemp (1978): Relational Understanding and Instrumental Understanding

Knowledge type	Knowledge quality	
	Superficial	Deep
Procedural	Common usage of *procedural knowledge*	?
Conceptual	?	Common usage of *conceptual knowledge*

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge ∘ Star, J. R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. ∘ Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?

• historische Perspektive	die Formelsprache als „Register“ mathematischer Erkenntnis
• semiotische Perspektive	Erweiterung der „Register“ auf numerische, geometrische, sprachliche, gestische Zeichen(systeme)
• psychologische Perspektive	Verstehen nur „konzeptuell“ zu fassen geht zulasten des Prozeduralen
• anthropologische Perspektive	Entwickeln und Beherrschen von Techniken als Ausdruck des Verstehens

factor(x^2-1)

$\rightarrow (x-1)(x+1)$

factor(x^3-1)

$\rightarrow (x-1)(x^2+x+1)$

factor(x^4-1)

$\rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)$

factor(x^5-1)

$\rightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

factor(x^6-1)

$\rightarrow (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

factor(x^7-1)

$\rightarrow (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

factor(x^8-1)

$\rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

factor(x^9-1)

$\rightarrow (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$

factor$(x^{10}-1)$

$\rightarrow (x-1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

A Conceptual Understanding of Algebraic Technique

- Being able to see a certain form (e.g. classes of expressions or equations, …)
- Being able to see relationships (equivalences)
- See through algebraic transformation (i.e. strategic awareness)

Kieran & Drijvers (2006). The Co-Emergence of Machine Techniques, Paper-And-Pencil Techniques, and Theoretical Reflection. ∘ Kieran (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills

• historische Perspektive	die Formelsprache als „Register“ mathematischer Erkenntnis
• semiotische Perspektive	Erweiterung der „Register“ auf numerische, geometrische, sprachliche, gestische Zeichen(systeme)
• psychologische Perspektive	Verstehen nur „konzeptuell“ zu fassen geht zulasten des Prozeduralen
• anthropologische Perspektive	Entwickeln und Beherrschen von Techniken als Ausdruck des Verstehens

Erläutern Sie die Zeilen (I) bis (V) im Sachzusammenhang.

(I) $S(3|1|2)$ $T(-9+t\,|\,25-2t\,|\,2)$

(II) $d=\sqrt{(-9+t-3)^2+(25-2t-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{5t^2-120t+720}$

(III) $\sqrt{5t^2-120t+720}=5$ (km)

also ist $t_1=12+\sqrt{5}\approx 14{,}2$ und $t_2=12-\sqrt{5}\approx 9{,}8$

(IV) $t_2<t_1$, also ist t_2 die gesuchte Lösung

(V) Ergebnis: $T_2(3-\sqrt{5}\,|\,1+2\sqrt{5}\,|\,2)$

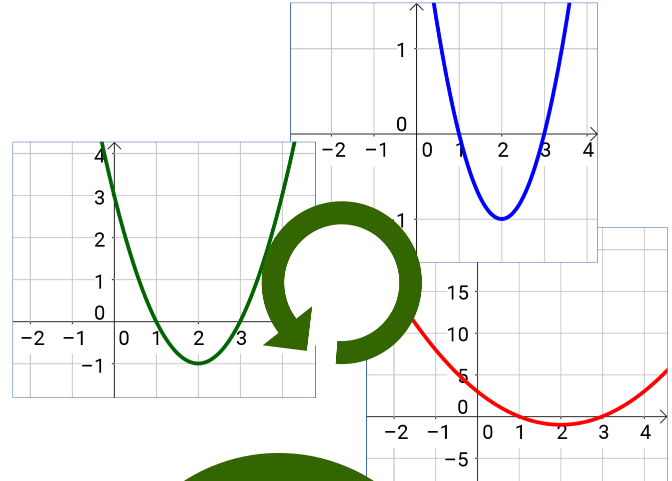
Hessisches Landesabitur 2017 Mathematik GK

Lesen I:
Verstehen mit Kalkül

Lesen I

- im engeren Sinne das Umsetzen
  von Schrift- in Lautsprache
- im weiteren Sinne ein Beimessen von Bedeutung
  durch den Aufbau einer mentalen Repräsentation

Rayner & Reichle (2010). Models of the reading process



$f(x) = (x-2)^2$

$f(x) = (x-3)(x-1)$

$f(x) = x^2-4x+3$

x	f(x)
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0

x	f(x)
0	3
0.5	1.25
1	0
1.5	-0.75
2	-1

x	f(x)
3	0
-1	8
20	323
1.5	-0.75
1.6	-0.84

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung ∘ Duval (2017). Understanding the Mathematical Wa

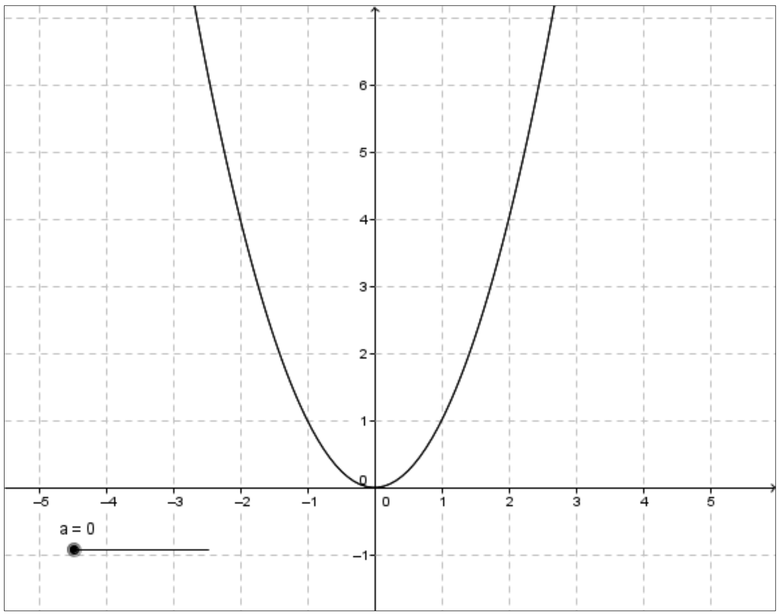
S: das ist ja einfach um eine
nach oben verschobene Normalparabel,
aber die Breite verändert sich ja.

I: Warum sagen Sie 'aber'?

S: die Parabel verschiebt sich ja nicht nur
nach oben, sondern sie wird ja auch enger.

$$x^2 + a$$

Pinkernell (2015). Reasoning with dynamically linked multiple representations of functions ∘ Pinkernell & Vogel (2017). “Das sieht aber anders aus“. ZuWahrnehmungsfallen beim Unterricht mit computergestützten Funktionsdarstellungen



S: das ist ja einfach um eine
nach oben verschobene Normalparabel,
aber die Breite verändert sich ja.

I: Warum sagen Sie 'aber'?

S: die Parabel verschiebt sich ja nicht nur
nach oben, sondern sie wird ja auch enger.

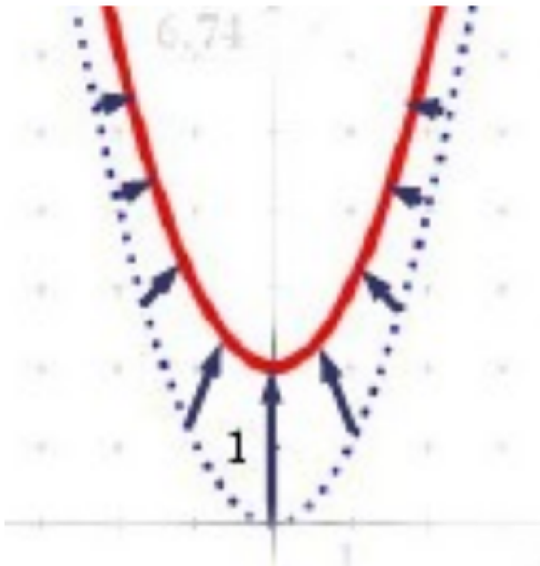
Dann müsste ja eigentlich
vor dem Quadrat noch was stehen

I: Aha. Warum?

S: Weil ich das so gelernt hab.

$$x^2 + a$$

Pinkernell (2015). Reasoning with dynamically linked multiple representations of functions ∘ Pinkernell & Vogel (2017). "Das sieht aber anders aus". ZuWahrnehmungsfallen beim Unterricht mit computergestützten Funktionsdarstellungen



S: das ist ja einfach um eine
nach oben verschobene Normalparabel,
aber die Breite verändert sich ja.

I: Warum sagen Sie 'aber'?

S: die Parabel verschiebt sich ja nicht nur
nach oben, sondern sie wird ja auch enger.

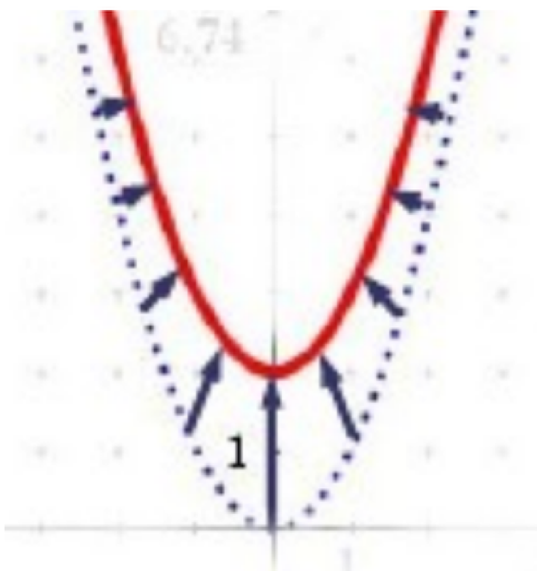
Dann müsste ja eigentlich
vor dem Quadrat noch was stehen

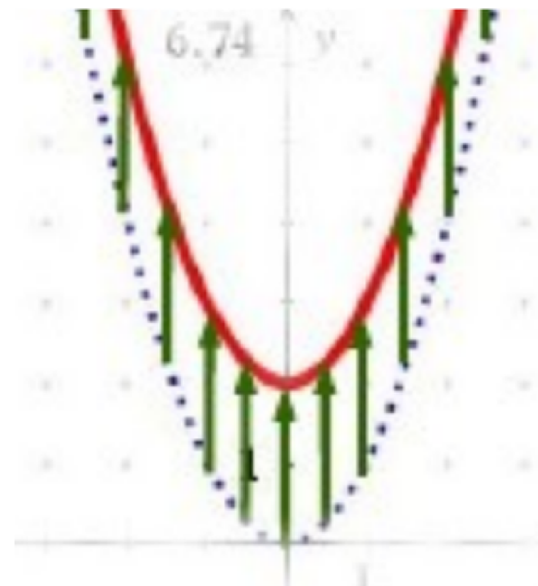
I: Aha. Warum?

S: Weil ich das so gelernt hab.

$$x^2 + a$$

Pinkernell (2015). Reasoning with dynamically linked multiple representations of functions ∘ Pinkernell & Vogel (2017). “Das sieht aber anders aus“. ZuWahrnehmungsfallen beim Unterricht mit computergestützten Funktionsdarstellungen





$x^2 + a$

Pinkernell (2015). Reasoning with dynamically linked multiple representations of functions ∘ Pinkernell & Vogel (2017). “Das sieht aber anders aus“. ZuWahrnehmungsfallen beim Unterricht mit computergestützten Funktionsdarstellungen

Lesen II:
Verstehen im Kalkül

• Arcavi (1999)	symbol sense
• MacGregor & Price (1999)	symbol awareness
• Pierce & Stacey (2001)	algebraic expectation
• Hoch & Dreyfus (2006)	structure sense
• Kieran (2006)	algebraische Denkhandlungen
• Fischer et al. (2010)	sources of meaning within algebra
• Rüede (2015)	Strukturieren
• Block (2015)	flexible algebraic action

Arcavi, A. (1994). Symbol sense. ∘ MacGregor, M., & Price, E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning ∘ Pierce, R., & Stacey, K. (2001). A Framework for Algebraic Insight. ∘ Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen. ∘ Kieran (2010). The false dichotomy ∘ Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills ∘ Rüede (2015). Strukturierungen von Termen und Gleichungen. Block (2015). Flexible algebraic action.

- Arcavi (1999)
- MacGregor & Price (1999)
- Pierce & Stacey (2001)
- Hoch & Dreyfus (2006)
- **Kieran (2006)**
- Fischer et al. (2010)
- Rüede (2015)
- Block (2015)

Sources of meaning in algebra

1. within mathematics
   (a) the algebraic structure itself, involving the letter-symbolic form.
   (b) multiple representations
2. problem context
3. outside mathematics or problem context

Arcavi, A. (1994). Symbol sense. ∘ MacGregor, M., & Price, E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning ∘ Pierce, R., & Stacey, K. (2001). A Framework for Algebraic Insight. ∘ Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen. ∘ Kieran (2010). The false dichotomy ∘ Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills ∘ Rüede (2015). Strukturierungen von Termen und Gleichungen. Block (2015). Flexible algebraic action.

- Arcavi (1999)
- MacGregor & Price (1999)
- Pierce & Stacey (2001)
- Hoch & Dreyfus (2006)
- Kieran (2006)
- **Fischer et al. (2010)**
- Rüede (2015)
- Block (2015)

Spezifisch algebraische Denkhandlungen

- Mathematisieren
- interpretationsfreies, kalkülhaftes Umformen
- Kalkül entwickeln
- Wirkungen bei kleinen Veränderungen analysieren

Arcavi, A. (1994). Symbol sense. ∘ MacGregor, M., & Price, E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning ∘ Pierce, R., & Stacey, K. (2001). A Framework for Algebraic Insight. ∘ Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen. ∘ Kieran (2010). The false dichotomy ∘ Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills ∘ Rüede (2015). Strukturierungen von Termen und Gleichungen. Block (2015). Flexible algebraic action.

Lesen I

- im engeren Sinne das Umsetzen
  von Schrift- in Lautsprache
- im weiteren Sinne ein Beimessen von Bedeutung
  durch den Aufbau einer mentalen Repräsentation

Rayner & Reichle (2010). Models of the reading process

Lesen I

- im engeren Sinne das Umsetzen
  von Schrift- in Lautsprache
- im weiteren Sinne ein Beimessen von Bedeutung
  durch den Aufbau einer mentalen Repräsentation
  - Bedeutung ergibt sich aus dem Zusammenhang (discourse processing)

Rayner & Reichle (2010). Models of the reading process

Erläutern Sie die Zeilen (I) bis (V) im Sachzusammenhang.

(I) $S(3|1|2) \quad T(-9+t|25-2t|2)$

(II) $d = \sqrt{(-9+t-3)^2 + (25-2t-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{5t^2 - 120t + 720}$

(III) $\sqrt{5t^2 - 120t + 720} = 5 \text{ (km)}$

also ist $t_1 = 12 + \sqrt{5} \approx 14{,}2$ und $t_2 = 12 - \sqrt{5} \approx 9{,}8$

(IV) $t_2 < t_1$, also ist t_2 die gesuchte Lösung

(V) Ergebnis: $T_2(3-\sqrt{5}|1+2\sqrt{5}|2)$

Hessisches Landesabitur 2017 Mathematik GK

Lesen II : Zusammenhang und Wissen

- im engeren Sinne das Umsetzen
  von Schrift- in Lautsprache
- im weiteren Sinne ein Beimessen von Bedeutung
  durch den Aufbau einer mentalen Repräsentation
  - Bedeutung ergibt sich aus dem Zusammenhang (discourse processing)
  - Bedeutung klärt sich durch Hintergrundwissen (syntactic parsing)

Rayner & Reichle (2010). Models of the reading process ◦ Gernsbacher & Kaschak (2006). Discourse Processing.

Lesen II : Fokus

Lesen der *surface structure*

- das Passen der Termstruktur zu einem bekannten Bearbeitungsverfahren
- Lesefokus verfahrensgesteuert

$$3 \cdot (x + 4) \;=$$

Lesen II : Fokus

Lesen der *surface structure*

- das Passen der Termstruktur zu einem bekannten Bearbeitungsverfahren
- Lesefokus verfahrensgesteuert

Lesen der *systemic structure*

- Erkunden von Zusammenhängen zwischen Teilen des Ausdrucks
- Lesefokus explorierend

$$3\cdot(x + 4) = 2\cdot(x + 4) + 5$$

Lesen II : Fokus

Lesen der *surface structure*

- das Passen der Termstruktur zu einem bekannten Bearbeitungsverfahren
- Lesefokus verfahrensgesteuert
- Interesse
  - Anwendung eines Verfahrens

Lesen der *systemic structure*

- Erkunden von Zusammenhängen zwischen Teilen des Ausdrucks
- Lesefokus explorierend
- Interesse
  - Strategieentwicklung und -abwägung
  - Erkundungen von Wirkungen und Abhängigkeiten

Lesen lernen

Erläutern Sie die Zeilen (I) bis (V) im Sachzusammenhang.

(I) $S(3|1|2) \quad T(-9+t|25-2t|2)$

(II) $d=\sqrt{(-9+t-3)^2+(25-2t-1)^2+(2-2)^2} = \sqrt{5t^2-120t+720}$

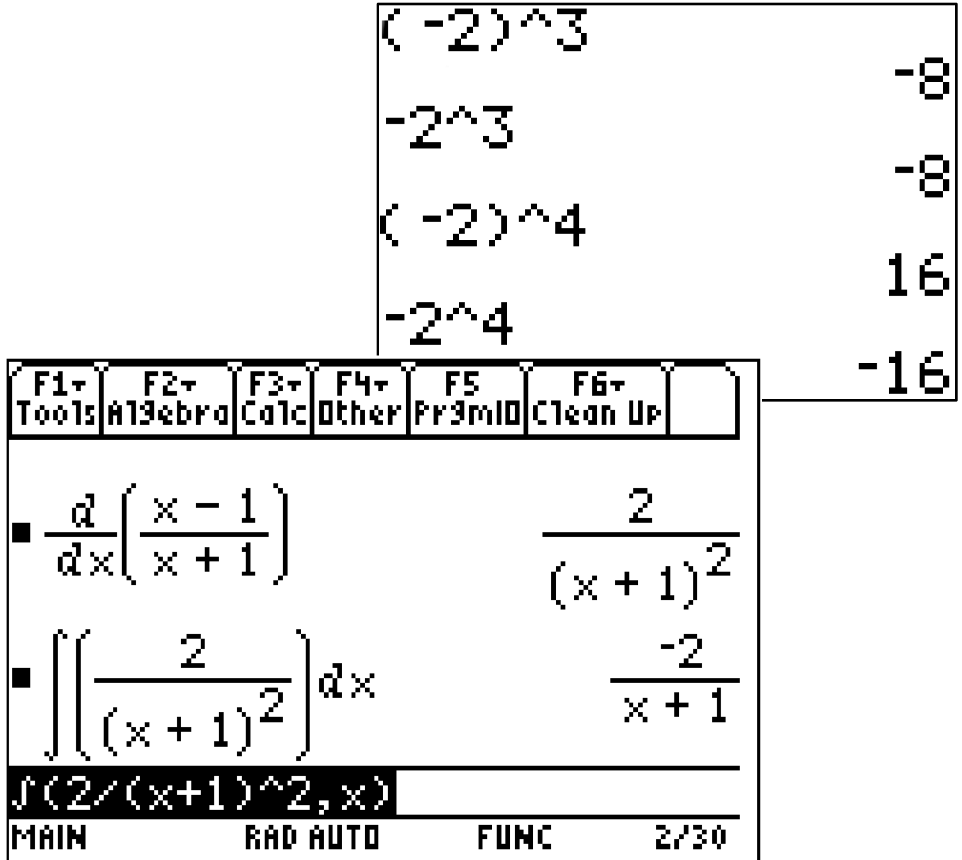
(III) $\sqrt{5t^2-120t+720}=5$ (km)

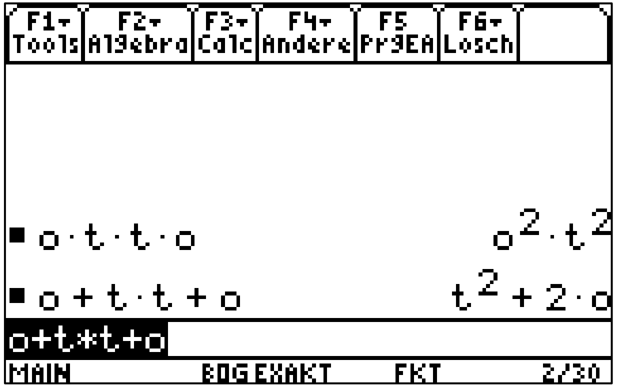
also ist $t_1=12+\sqrt{5}\approx 14{,}2$ und $t_2=12-\sqrt{5}\approx 9{,}8$

(IV) $t_2 < t_1$, also ist t_2 die gesuchte Lösung

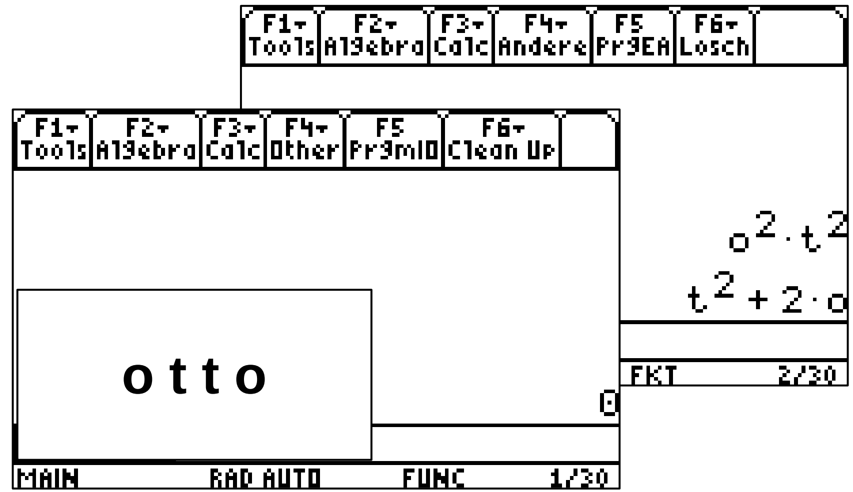
(V) Ergebnis: $T_2(3-\sqrt{5}|1+2\sqrt{5}|2)$

Hessisches Landesabitur 2017 Mathematik GK

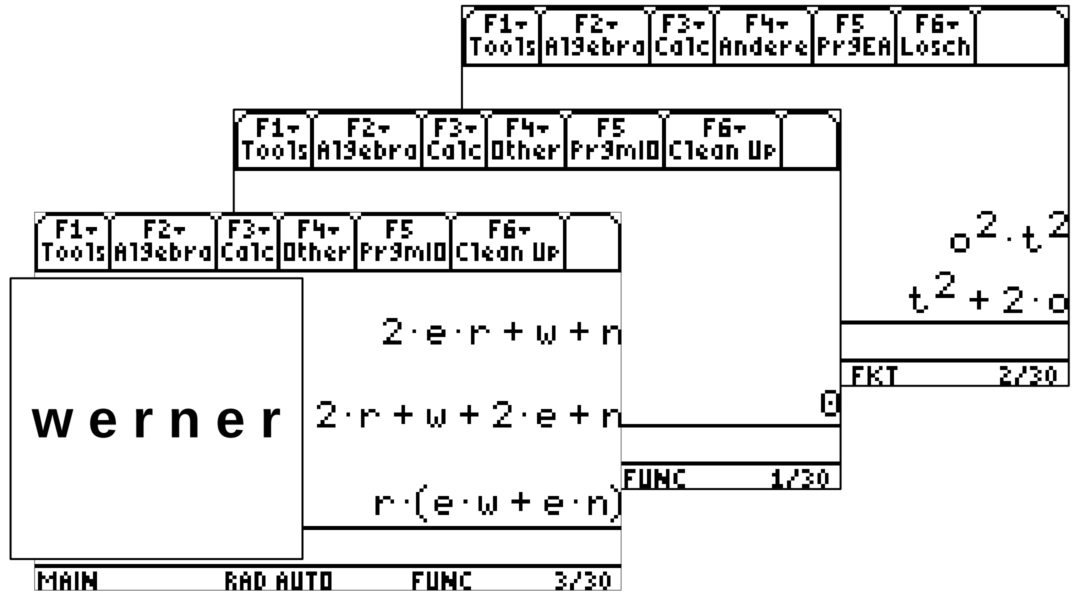

(-2)^3
-8
-2^3
-8
(-2)^4
16
-2^4
-16
F1 Tools
F2 Algebra
F3 Calc
F4 Other
F5 PrgmIO
F6 Clean Up
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
$\frac{2}{(x+1)^2}$
$\int\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx$
$\frac{-2}{x+1}$
∫(2/(x+1)^2,x)
MAIN
RAD AUTO
FUNC
2/30



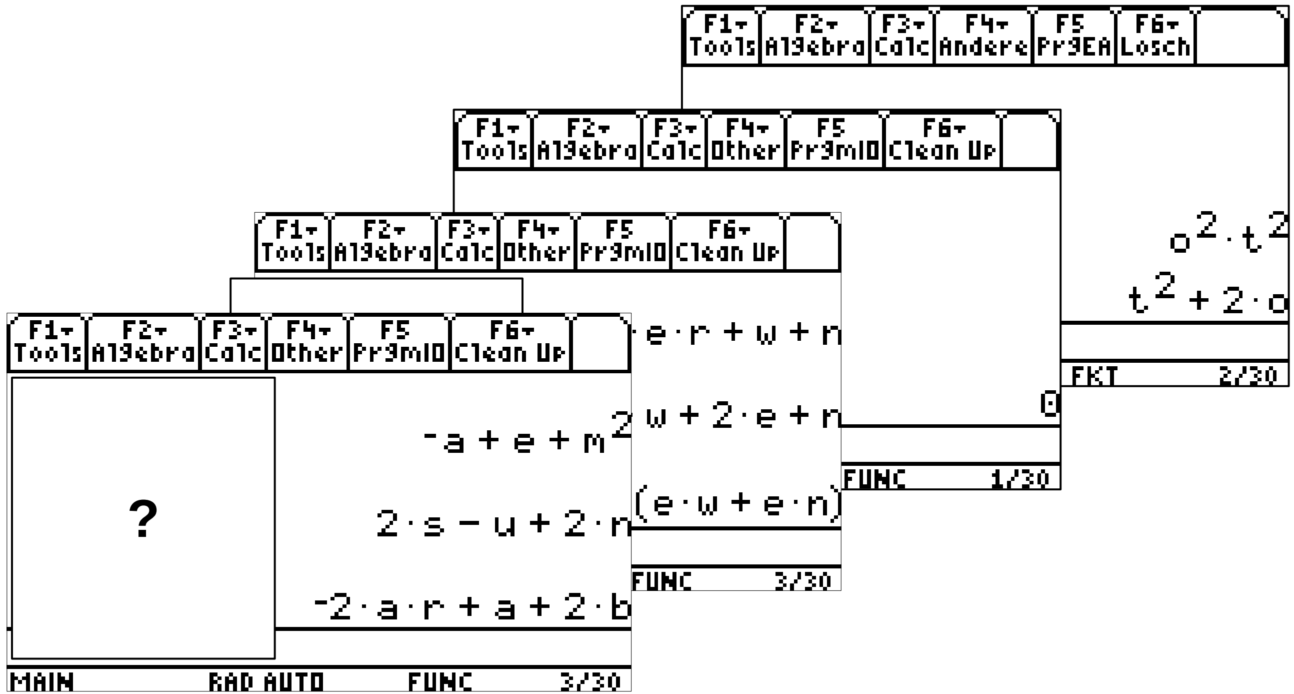
Pinkernell, G., & Diemer, C. (2006). „Mach' den Otto zur Null“ Ein spielerischer Einstieg in die Algebra mit dem Computer-Algebra-System.



Pinkernell, G., & Diemer, C. (2006). „Mach' den Otto zur Null" Ein spielerischer Einstieg in die Algebra mit dem Computer-Algebra-System.



Pinkernell, G., & Diemer, C. (2006). „Mach' den Otto zur Null“ Ein spielerischer Einstieg in die Algebra mit dem Computer-Algebra-System.



F1 Tools F2 Algebra F3 Calc F4 Andere F5 PrgEA F6 Losch
FKT 2/30
F1 Tools F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
FUNC 1/30
F1 Tools F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
FUNC 3/30
F1 Tools F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
?
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

$\text{factor}(x^2 - 1)$

$\rightarrow \ (x-1)(x+1)$

$\text{factor}(x^3 - 1)$

$\rightarrow \ (x-1)(x^2+x+1)$

$\text{factor}(x^4 - 1)$

$\rightarrow \ (x-1)(x+1)(x^2+1)$

$\text{factor}(x^5 - 1)$

$\rightarrow \ (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$\text{factor}(x^6 - 1)$

$\rightarrow \ (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

$\text{factor}(x^7 - 1)$

$\rightarrow \ (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$\text{factor}(x^8 - 1)$

$\rightarrow \ (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$\text{factor}(x^9 - 1)$

$\rightarrow \ (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$

$\text{factor}(x^{10} - 1)$

$\rightarrow \ (x-1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

A. Compare Condition

Mandy's Solution:	**Erica's Solution:**
$5(y+1) = 3(y+1)+8$	$5(y+1) = 3(y+1)+8$
$5y+5 = 3y+3+8$ *Distribute*	$2(y+1) = 8$ *Subtract on Both*
$5y+5 = 3y+11$ *Combine*	$y+1 = 4$ *Divide on Both*
$2y+5 = 11$ *Subtract on Both*	$y = 3$ *Subtract on Both*
$2y = 6$ *Subtract on Both*	
$y = 3$ *Divide on Both*	

1. Mandy and Erica solved the problem differently, but they got the same answer. Why?

2. Why might you choose to use Erica's way?

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?

Vergleiche die beiden Lösungen:

Bertas Lösung:		Erikas Lösung:	
$\frac{4x^2-16}{2x-4}$	Ausklammern	$\frac{4x^2-16}{2x-4}$	3. binomische Formel anwenden
$\frac{4(x^2-4)}{2(x-2)}$	Kürzen	$\frac{(2x+4)(2x-4)}{2x-4}$	Kürzen
$\frac{2(x^2-4)}{x-2}$	3. binomische Formel anwenden	$2x+4$	
$\frac{2(x+2)(x-2)}{x-2}$	Kürzen		
$2(x+2)$	Ausmultiplizieren		
$2x+4$			

a) Berta und Erika haben die Aufgabe unterschiedlich gelöst, erhalten aber dasselbe Ergebnis. Warum?

b) Welchen Weg würdest du wählen? ◄

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? Weigand, Schüler-Meyer & Pinkernell (2022). Didaktik der Algebra

Fachbereich Mathematik
AG Didaktik der Mathematik
Dr. Guido Pinkernell

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Projektseminar
„Argumentieren und Beweisen"

Hausübung 02

Satz A

Man kann $14 \cdot 17$ im Kopf wie folgt schnell berechnen:

- $14+7=21$
- $21 \cdot 10=210$
- $210+4 \cdot 7=238$

Dieses Verfahren gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $10 \leq n, m \leq 20$

Satz B

Die Summe zweier aufeinander folgender ungerader Zahlen ist durch 4 teilbar.

Satz A

Man kann $14 \cdot 17$ im Kopf wie folgt schnell berechnen:

- $14+7=21$
- $21 \cdot 10=210$
- $210+4 \cdot 7=238$

Dieses Verfahren gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $10 \leq n, m \leq 20$

Satz A

Ich versuche zunächst den Algorithmus allgemein zu beschreiben:

Für $10 \leq n, m \leq 20$ werden die folgenden Schritte durchgeführt, um $n \cdot m$ zu berechnen:

1. $n+(m-10) = E_1$
2. $E_1 \cdot 10 = E_2$
3. $E_2 + (n-10)(m-10) = E_3 \overset{!}{=} n \cdot m$

Zusammenfassend kann man die Beh. wie folgt darstellen:

$$[n+(m-10)] \cdot 10 + (n-10)(m-10) = n \cdot m$$

Verifikation durch Umformen der linken Seite:

$$10n \overset{+10m}{} - 100 + nm - 10n - 10m + 100$$

$$= nm \ \cancel{= 10n - 10m}$$

Satz A

Man kann $14 \cdot 17$ im Kopf wie folgt schnell berechnen:

- $14+7=21$
- $21 \cdot 10=210$
- $210+4 \cdot 7=238$

Dieses Verfahren gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $10 \leq n, m \leq 20$

Allgemein gilt mit den folgenden Bezeichnungen:

$$x = \underbrace{div_{10}(x)}_{\text{Divisionserg.} \,\hat{=}\, \text{Zehnerziffer}} \cdot 10 + \underbrace{mod_{10}(x)}_{\text{Divisionsrest} \,\hat{=}\, \text{Einerziffer}}$$

$$\cancel{m \cdot n = (div_{10}(m) \cdot 10 + mod_{10}(m)) \cdot (div_{10}(n) \cdot 10 + mod_{10}(n))}$$

$$\cancel{= m \cdot div_{10}(n) \, 10 + \quad + mod_{10}(m) \, mod_{10}(n)}$$

$$m \cdot n = m \cdot (div_{10}(n) \cdot 10 + mod_{10}(n))$$

$$= m \cdot div_{10}(n) \cdot 10 + m \cdot mod_{10}(n)$$

$$= m \cdot div_{10}(n) \cdot 10 + div_{10}(m) \cdot 10 \cdot mod_{10}(n) + mod_{10}(m) \, mod_{10}(n)$$

$$= (m \cdot div_{10}(n) + \overbrace{\quad}^{mod_{10}(n)} div_{10}(m)) \cdot 10 + mod_{10}(m) \, mod_{10}(n)$$

In algorithmischer Form wie oben:

1) $m \cdot div_{10}(n) + mod_{10}(n) \cdot div_{10}(m) = E_1$
2) $E_1 \cdot 10 = E_2$
3) $E_2 + mod_{10}(m) \, mod_{10}(n) = m \cdot n$

Satz A

Man kann $14 \cdot 17$ im Kopf wie folgt schnell berechnen:

- $14+7=21$
- $21 \cdot 10=210$
- $210+4 \cdot 7=238$

Dieses Verfahren gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $10 \leq n, m \leq 20$

Allgemein gilt mit den folgenden Bezeichnungen:

Ich fasse zusammen: Zwei natürliche Zahlen m, n [≤ 100 → es geht auch mit allen anderen, lässt sich aber kaum noch bewältigen] lassen sich auf folgende Weise multiplizieren ($m \geq n$)

1) $mod_{10}(n) \cancel{4} \cdot \frac{div_{10}(m)}{div_{10}(n)} = E_1$
2) $E_1 + m = E_2$
3) $E_2 \cdot div_{10}(n) \cdot 10 = E_3$
4) $E_3 + mod_{10}(m)\, mod_{10}(n) = m \cdot n$

$+ mod_{10}(m)\, mod_{10}$

$$= \left(m \cdot div_{10}(n) \overbrace{+\, div_{10}(m)}^{mod_{10}(n)}\right) \cdot 10 + mod_{10}(m)\, mod_{10}(n)$$

In algorithmischer Form wie oben:

1) $m \cdot div_{10}(n) + mod_{10}(n) \cdot div_{10}(m) = E_1$
2) $E_1 \cdot 10 = E_2$
3) $E_2 + mod_{10}(m)\, mod_{10}(n) = m \cdot n$

Satz A

Man kann $14 \cdot 17$ im Kopf wie folgt schnell berechnen:

- $14+7=21$
- $21 \cdot 10=210$
- $210+4 \cdot 7=238$

Dieses Verfahren gilt für alle $n,m \in \mathbb{N}$ mit $10 \leq n,m \leq 20$

Dieser letzte Algorithmus ist besonders hilfreich für große Zahlen mit dieser Eigenschaft

z. B.: $2004 \cdot 2007$

1) $2004 + 7 = 2011$

2) $2011 \cdot 10 \cdot 200 = 4022000$

3) $4.022.000 + 4 \cdot 7 = \underline{\underline{4.022.028}}$

Verstehen im Kalkül
Verstehen im Kalkül

Lesen I: Verstehen mit Kalkül
Lesen II: Verstehen im Kalkül

Lesen lernen