

Vom Konkreten zum Abstrakten. Einführung des Variablenbegriffs in der Sekundarstufe I

Dagmar Melzig

Josef-Albers-Gymnasium Bottrop

4. Karlsruher Didaktik-Workshop

20. - 21. Februar 2025

- Was macht den Variablenbegriff (der elementaren Algebra) aus?
- Wie entwickelt er sich im Mathematikunterricht?
- Wie sehen geeignete Zugänge zur elementaren Algebra aus?

Fokus: Der Nutzen von konkretem Anschauungsmaterial bei der Einführung in die Algebra

Überblick

- Theoretische Grundlagen
- Die Aufgabe „Knack die Box“
- Ein Fallbeispiel
- Ergebnisse

Was ist eine Variable?

- „In der mathematischen Literatur werden Variable meist nur verwendet und nicht definiert.“
(Malle 1993, S. 44)
- In diesem Sinne: Erläuterung des Begriffs, die bei der Verwendung ansetzt (Thiel 1996)
 - zentral: Zweck der Stellvertretung

Erläuterung des Variablenbegriffs nach Thiel 1996

Der Begriff „Variable“ bezeichne in der Mathematik Buchstaben, die einem der folgenden Zwecke dienen:

- Stellvertretung für bedeutungsvolle Ausdrücke im Hinblick auf formale Operationen mit diesen; zwei Aspekte in der Elementarmathematik:
 - Unbestimmte
 - Unbekannte
- Stellvertretung für bedeutungsvolle Zeichenreihen zum Ausdruck der Allgemeingültigkeit von Aussageschemata („Gesetzen“)
- Stellvertretung für bedeutungsvolle Zeichenreihen zum Ausdruck von funktionalen Zusammenhängen

Die Metapher als Denkfigur

- „One of the principal results in cognitive science is that abstract concepts are typically understood, via metaphor, in terms of more concrete concepts.“
(Lakoff & Núñez 2000, S. 39)
- Lakoff & Núñez: Rolle-für-Individuum-Metonymie ist grundlegend für die Algebra
 - „It is this metonymic mechanism that makes the discipline of algebra possible, by allowing us to reason about numbers or other entities without knowing which particular entities we are talking about.“ (ebd., S. 75)
- Metapher (im engeren Sinne): Beziehung der Ähnlichkeit
- Metonymie: reale Beziehung


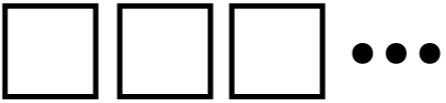
Verankerung im Konkreten

Hutchins 2005

- der Umgang mit konkret-gegenständlichen Strukturen kann eine begriffliche Struktur eines Lernenden stabilisieren („material anchor“)
- dies wird dadurch erreicht, dass begriffliche Elemente auf die konkret-gegenständliche Struktur abgebildet werden und auf diese Weise im übertragenen Sinne dort festgehalten werden können
- „A physical structure is not a material anchor because of some intrinsic quality, but because of the way it is used.“ (Hutchins 2005, S. 1562)
- Anker bleibt auch nach Ablösung vom Konkreten gesetzt

Knack die Box

Legt mit Bohnen und leeren Boxen die beiden folgenden Anordnungen:

Anordnung A	Anordnung B
	

Nehmt Bohnen aus dem Bohnenvorrat und füllt die Boxen so, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt).
2. In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen.

Wie viele Bohnen können in den schwarzen bzw. in den weißen Boxen liegen?

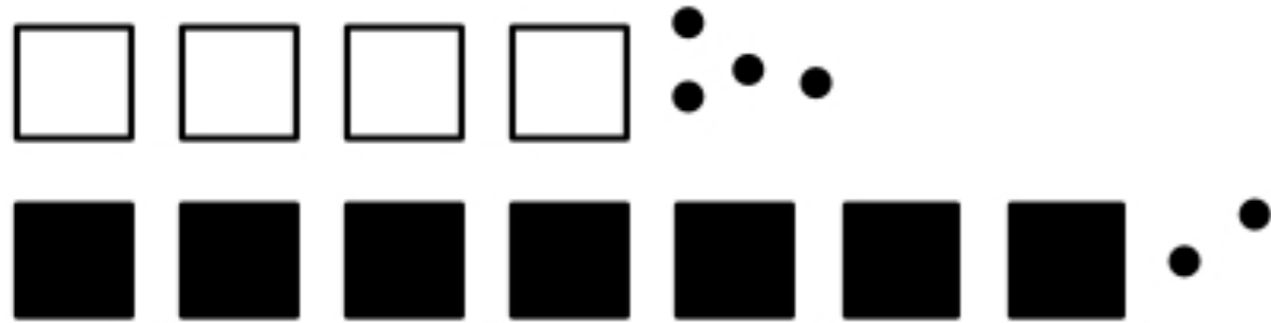
Knack die Box

Erfindet selbst solche Paare von Anordnungen! Versucht die Boxen so zu füllen, dass die beiden Bedingungen von oben erfüllt sind. Gibt es immer (mehrere) Möglichkeiten die Boxen entsprechend zu füllen?

Vielleicht helfen Euch Tabellen der folgenden Art beim übersichtlichen Aufschreiben Eurer Ergebnisse!

Anz. der Bohnen in einer schwarzen Box					
Anz. der Bohnen in einer weißen Box					

Ein Fallbeispiel



$$\begin{aligned} \text{Bsp 1:} \\ s &= 2 \\ 7 \cdot 2 + 2 &= 16 \\ 16 - 4 &= 12 \\ 12 : 4 &= 3 \end{aligned}$$

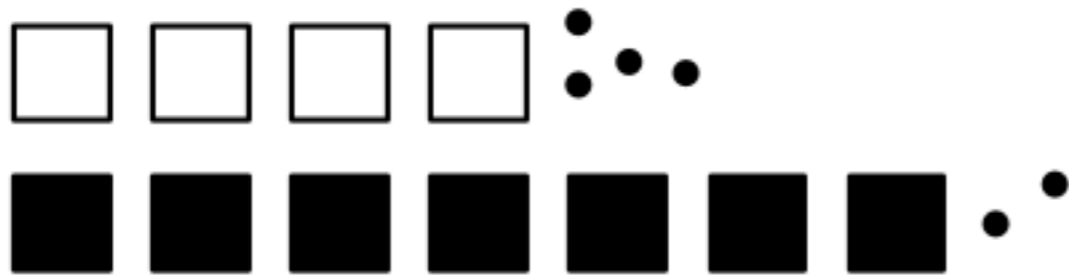
$$\begin{aligned} \text{Bsp 2:} \\ s &= 8 \\ 7 \cdot 8 - 2 &= 54 \\ 54 : 4 &\text{ passt nicht} \end{aligned}$$

- 1) Anzahl der Bohnen in einer schwarzen Box festlegen
(entsprechende Anzahl an Bohnen auf jede Box legen)
- 2) Gesamtzahl der Bohnen in der Anordnung mit den schwarzen Boxen bestimmen
- 3) die vier einzelnen Bohnen aus der Anordnung mit den weißen Boxen von dieser Gesamtzahl abziehen
- 4) überprüfen, ob sich die verbliebene Anzahl Bohnen
glatt auf die vier weißen Boxen aufteilen lässt

Weiterentwicklung:

Zusammenfassen der Schritte (2) und (3)

Einbeziehung des Materials durch Alltagssprache, Handlungen und auf das Material bezogene Zeigegesten

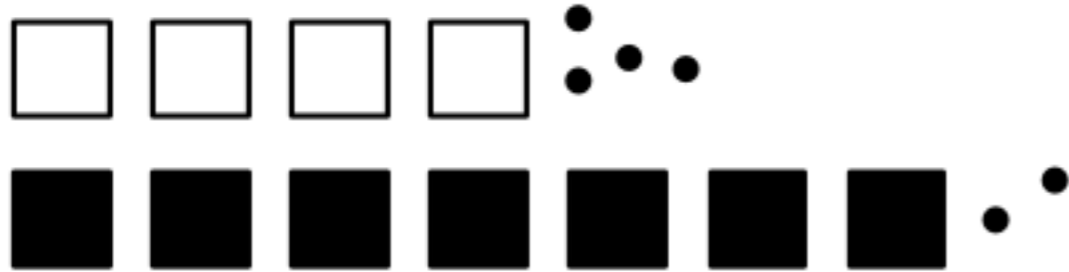


Auf jeder schwarzen Box liegen zwei Bohnen

24 Nils

Ok, wieviel sind das (*macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung*), zwei (*zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen*), 14 (*zeigt entlang der schwarzen Boxen; legt eine Bohne, die offenbar auf die Nachbarbox gekullert ist, wieder zurück, so dass auf allen schwarzen Boxen je zwei Bohnen liegen*), 16 (*zeigt auf die Anordnung mit den schwarzen Boxen*) minus vier (*zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen*) 12, dann muss hier drei (*zeigt auf eine weiße Box*). Zwei, drei.

Einbeziehung des Materials durch
am Material verankerte abstrakte Zeigegesten, die
Äußerungen auf Zahlenebene verdeutlichen



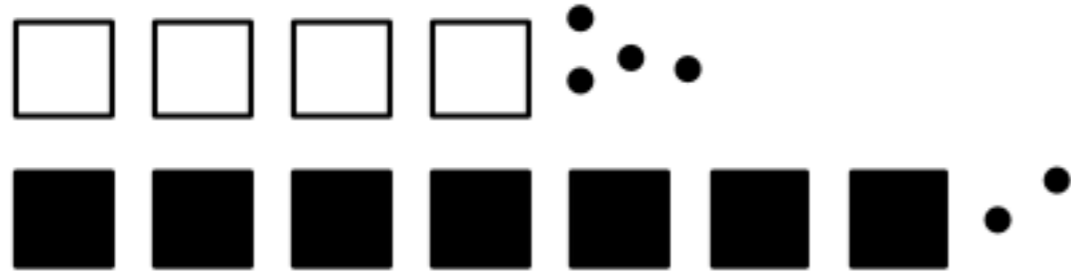
(Gedachte) drei Bohnen auf jeder schwarzen Box

30 Nils Jetzt versuchen wir das mal mit dre (*beginnt je eine dritte Bohne auf die schwarzen Boxen zu legen*)

32 Nathan Mit dre. Ok, dre, drei, sechs, neun, zwölf, 15 #, 18, 21 (*zeigt nacheinander auf die schwarzen Boxen*) minus zwei (*zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen*) sind

33 Nils # hat nun auf vier schwarze Boxen Bohnen gelegt. Er bricht das Auffüllen der Bohnen ab und schaut Nathan beim Zählen zu.

Äußerungen auf Zahlenebene und gedankliche Einbeziehung des Materials, die aber nicht mehr ausgedrückt wird



Ausschließen einer Lösung mit acht Bohnen pro schwarzer Box und Verkürzung des Verfahrens

57 Nathan Und mit acht? Acht mal sieben sind 56

59 Nils Plus, nee, minus zwei einfach nur (*räumt währenddessen die Bohnen in die Schachtel zurück*), eh, sind 54, durch vier (.) passt nicht

Ergebnisse

Die interpretativen Analysen haben gezeigt,

- dass die materiellen Boxen zu Metaphern für eine sich entwickelnde abstrakte Vorstellung von Variablen werden können.
- wie sich eine solche metaphorische Vorstellung entwickeln kann.

Ergebnisse

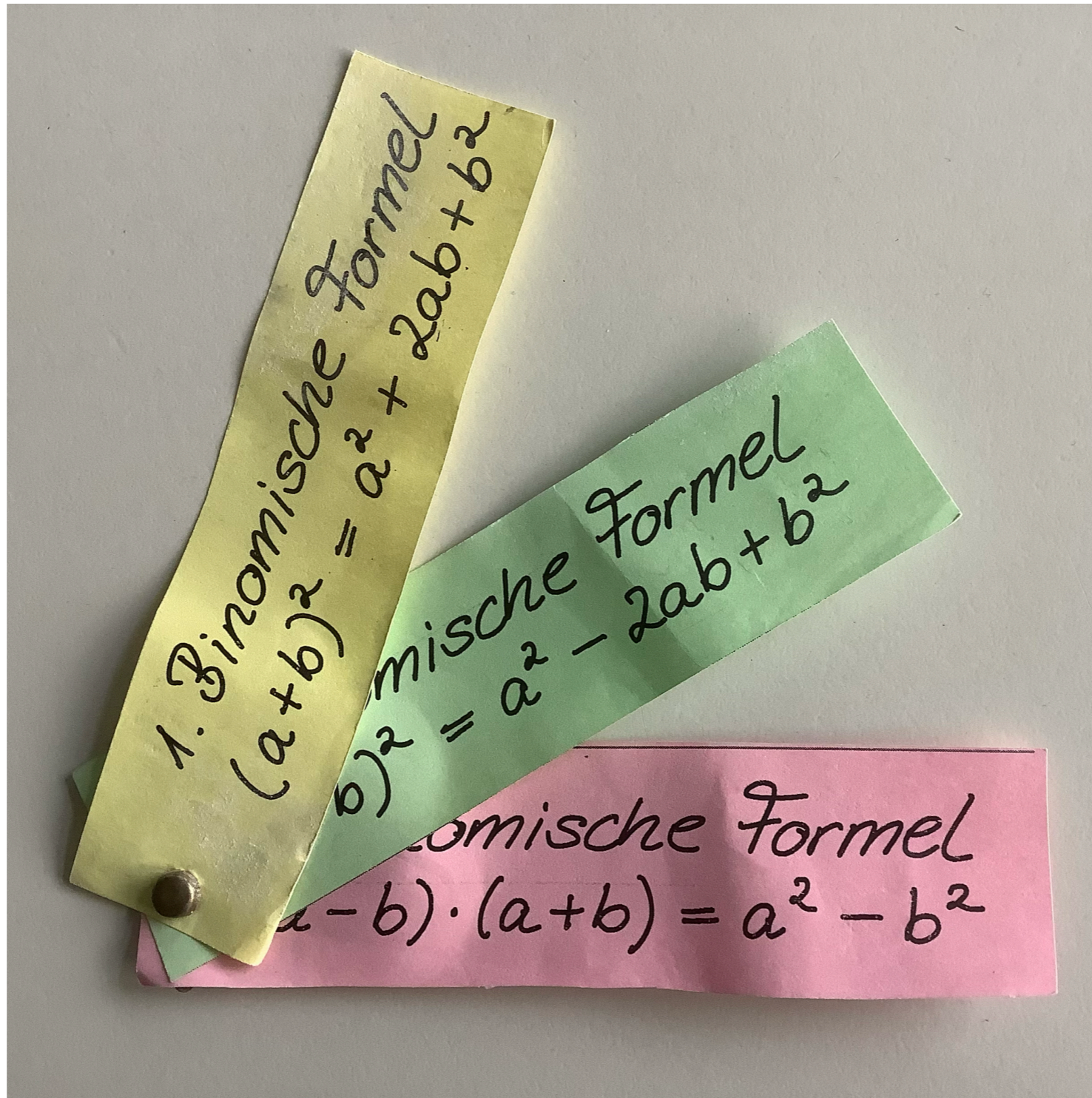
Fortschreitender Umdeutungsprozess der Boxen(situation)

- grundlegender Deutungsprozess bei der Bearbeitung von Knack die Box:
Box als Stellvertreter für Bohnen(anzahlen) begreifen
 - Lernende müssen erkennen, dass die Box im Rahmen der Aufgabe *für etwas anderes steht* (vgl. die semiotische Funktion von Zeichen nach Steinbring (2006))
- entscheidend für den Begriffsbildungsprozess der Variablen:
 - metaphorische Betrachtung der Box
 - das Stellvertreter-Sein ist dabei das entscheidende Charakteristikum, das die konkret-gegenständliche Box mit dem gedanklichen Objekt der Variablen eint und sie zur Metapher für einen sich entwickelnden Variablenbegriff befähigt

Ergebnisse

Fortschreitender Umdeutungsprozess der Boxen(situation)

- eine metaphorische Betrachtung der Box wird möglich, wenn Lernende die Boxensituation als bloße Darstellung einer mathematischen Struktur begreifen (vgl. die epistemologische Funktion von Zeichen nach Steinbring (2006))
- metaphorische Verwendung der Boxen durch am Material verankerte abstrakte Zeigegegenstände
 - Verankerung des sich entwickelnden Begriffs an den Boxen
 - Gebrauch der Box als material anchor stärkt die Box als Metapher
 - auch als Zwischenschritt auf dem Weg zur metaphorischen Betrachtung



Nach einer Idee aus Kramer (2016)

Literatur

Affolter, W. u. a. (2003). mathbu.ch 7. Schulverlag bmv AG und Klett und Balmer AG, Bern/Zug.

Goldin-Meadow, S. (2005). Hearing Gesture. How our hands help us think. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England.

Hutchins, E. (2005). Material anchors for conceptual blends. Journal of Pragmatics, 37:1555–1577.

Lakoff, G. and Núñez, R. E. (2000). Where Mathematics Comes From. How the embodied mind brings mathematics into being. Basic Books, New York.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.

Melzig, D. (2013). Die Box als Stellvertreter. Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff. Dissertation Universität Duisburg-Essen.

Literatur

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sign? – An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2):133–162.

Thiel, C. (1996). Artikel „Variable“. In Mittelstraß, J. (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*. Band 4, 473–475. Metzler, Stuttgart, Weimar.

Kramer, M. (2016). *Mathematik als Abendteuer*. Band II: Algebra und Vektorrechnung. Klett Kallmeyer, Seelze. S. 206 ff.