Lisa Hefendehl-Hebeker, Universität Duisburg-Essen

Die besondere Wirkmächtigkeit des algebraischen Denkens

Vortrag auf dem Karlsruher Didaktik-Workshop am 20. Februar 2025

Einleitung

> „An der ‚Schnittstelle' der orientalischen und der griechischen Traditionslinien, dort also, wo das Wissen um Verfahrensweisen in den Rang eines begründeten wissenschaftlichen Wissens gehoben wird, entsteht eine für die neuzeitliche Wissenschaft konstitutive und vorbildlose Neuerung: *die mathematische Formel.*" (Krämer 1988, S. 72)

In ihrem nach wie vor lesenswerten Buch über die Idee der Formalisierung in geschichtlichen Abriss entfaltet die Philosophin Sybille Krämer, dass und inwiefern die Erfindung der mathematischen Formelsprache für die neuzeitliche Wissenschaft eine revolutionäre Bedeutung hatte. Worin die besondere Wirkmächtigkeit dieses Werkzeuges besteht, welche Denkweisen für eine verständige Handhabung erforderlich sind und wie diese im Mathematikunterricht angebahnt werden können, soll Thema dieses Vortrages sein. Dazu werden wir uns an der Genese der Entwicklung orientieren.

1. Präalgebraisches Denken

Zahlenmauern sind ein bewährtes Aufgabenformat, das im Mathematikunterricht vielfältig einsetzbar ist. Das Thema bietet Lerngelegenheiten für unterschiedliche Jahrgangsstufen und Schwierigkeitsgrade.

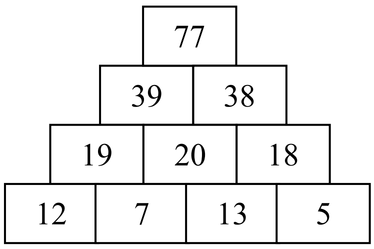


Abb. 1: Beispiel einer Zahlenmauer

In einer 5. Klasse sollen in der Zahlenmauer in Abb. 2 die Lücken ausgefüllt werden (Sjuts, 2006):

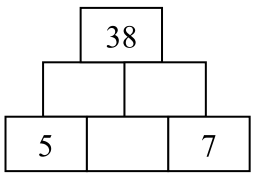


Abb. 2: Zahlenmauer mit Lücken

Torsten und Karen haben beide herausgefunden, dass zwischen *5* und *7* in der unteren Reihe die Zahl *13* eingetragen werden muss.

- Torsten argumentiert: „Die Differenz zwischen *5* und *7* beträgt *2*. So müssen die oberen Zahlen auch eine Differenz von *2* haben, weil *5* und *7* mit der gleichen Zahl addiert werden. Nur *18* und *20* haben eine Differenz von *2* und geben zusammen *38*. Dann ist das *13*, weil *5+13=18* und *7+13=20*.“
- Karen hat eine andere, aber ebenso richtige Begründung gefunden: *„5+7=12, 38-12=26, 26:2=13,* weil die Zahl zweimal gebraucht wird. Einmal bei der *5* und einmal bei der *7*.“

Beide Kinder nutzen geschickt die erkannten strukturellen Beziehungen zwischen den vorhandenen und den gesuchten Einträgen in der Zahlenmauer, um die *unbekannte Zahl* in der untersten Reihe zu finden. Ihre Argumentationen repräsentieren ein frühes, aber entscheidendes Stadium in der Entstehung algebraischer Denkweisen, wie es sich in den antiken Hochkulturen Mesopotamien und Ägypten anbahnte, in der griechischen Mathematik große Fortschritte machte und bei Diophant eine neue Reichweite erfuhr.

Radford (2010) beschreibt den Kern dieser Erkenntnisleistungen als den "analytischen Umgang mit dem Unbestimmten". Danach wird mit unbestimmten Zahlen oder Größen, mit denen nicht numerisch gerechnet werden kann, relational operiert. Sie werden als normale Zahlen oder Größen angesehen, man betrachtet, wie sie sich in einem arithmetischen Gefüge bewegen, und zieht daraus Schlüsse, die Teil einer Argumentationskette werden können. Das tun Torsten und Karen auf je eigene Weise. Ihre Überlegungen beruhen auf einem klaren Bewusstsein von der arithmetischen Struktur der Zahlenmauer, achten aber auf unterschiedliche Aspekte.

- Torsten erkennt, dass sich die Differenz der Randzahlen 5 und 7 in der Grundreihe auf die mittlere Etage vererbt, und zieht daraus Schlüsse für die weitere Zusammensetzung. Sein Augenmerk liegt auf der Konstanz der Differenz, also auf der Fortsetzung von arithmetischen Relationen.
- Karen arbeitet explizit mit dem Konzept „der (gesuchten, unbekannten) Zahl" und löst diese schrittweise aus ihren Verknüpfungen mit den gegebenen Zahlen 5, 7 und 38 heraus.

Die Kinder argumentieren mit präalgebraischen Denkweisen, die noch nicht die ausgereiften symbolischen Methoden einer Formelsprache verwenden. Diese Denkweisen sind grundlegend für die weitere Entwicklung algebraischer Fähigkeiten und sollten deshalb in den ersten sechs Schuljahren ausgebildet und gepflegt werden. Dazu gibt es in Unterrichtswerken für die Grundschule und die Unterstufe des Gymnasiums schöne Beispiele. Ich komme darauf zurück.

Die Ausbildung eines solchen Strukturverständnisses dient vielen Zielen zugleich: Es vertieft den Umgang mit der Arithmetik, es trainiert die Problemlösefähigkeit und es legt wichtige Grundlagen für einen verständigen Umgang mit algebraischen Methoden. Mit dessen Hilfe werden Torsten und Karen die Zahlenmaueraufgabe in später im Handstreich lösen können, indem sie für die gesuchte Zahl in der unteren Reihe das Symbol *x* setzen (Abb. 3) und den Rest durch Operieren mit Zeichen erledigen.

Abb. 3: Ansätze zum Variablengebrauch

2. Rechnen mit der unbekannten Zahl

Es war *Diophant* (um 250 n. Chr.), der einen wesentlichen Schritt über das frühe Stadium der unbestimmten Analytik hinaus vollzog. Er war in seiner Zeit überragend im Lösen von Gleichungen. Anknüpfend an Traditionen aus Babylonien und Ägypten entwickelte er das Konzept der (gesuchten, unbekannten) „Zahl“ (Arithmos), das allgemeiner war als das der kontextbezogenen Größen früherer Generationen. Das half ihm, die Reichweite seiner Lösungsmethoden auszudehnen. Er bezeichnete die Unbekannte und ihre Potenzen abkürzend mit Buchstaben und rechnete damit, als ob es sich um konkrete Zahlen handelte. Auch in diesem „Rechnen als ob“ sieht Radford (2001) ein wichtiges Stadium in der Genese der Algebra. Diophant führte auch Symbole für die Rechenoperationen ein.

Das folgende Beispiel (Bos und Reich, 1990, S. 192) demonstriert seine Vorgehensweise:

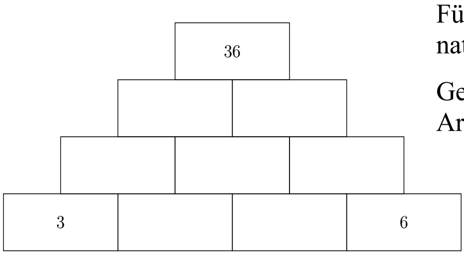
> Eine gegebene Zahl ist in zwei Teile zu teilen, deren Differenz gegeben ist.
> Es sei die gegebene Zahl 100, die Differenz sei 40.
> Man setze die kleinere A, die größere sei folglich A + 40.
> Die Summe ist gegeben als 100. Folglich ist 100 = 2A + 40.
> Von Ähnlichem ziehe Ähnliches ab: von 100 subtrahiere 40, es folgt 2A = 60, woraus sich A = 30 ergibt.

Charakteristische Gestaltungsmerkmale dieser Vorgehensweise sind folgende (Sesiano, 1990, S. 82 f.):

- Am Anfang steht eine allgemeine Problemformulierung, in welcher von gesuchten und gegebenen Größen allgemein die Rede ist. Die gegebenen Größen werden dann in der Entfaltung des Lösungsweges zahlenmäßig konkretisiert, hier durch 100 und 40. Die allgemeine Problemstellung wird somit durch ein generisches Beispiel repräsentiert.
- Die gesuchten Größen werden als Funktionen ein und derselben Unbekannten (hier A) ausgedrückt; diese wird als Symbol dargestellt. Aus diesem Ansatz mit den Summanden A und A + 40 lässt sich die Bedingung 100 = 2A + 40 herleiten.

Diophant entwickelte dabei auch das Prinzip des Lösens einer Gleichung durch Umformen, bis auf einer Seite die Unbekannte und auf der anderen Seite ein Zahlenausdruck steht. Damit gelangte er zu Verfahren, wie man zu einem gegebenen Problem Lösungen konstruieren kann, ohne aber systematische Vollständigkeit anzustreben. Zur Darstellung verwendete er eine Mischung aus symbolischen und rhetorischen Darstellungsweisen.

Der erreichte Fortschritt war groß, und dennoch blieben die Möglichkeiten nach heutigen Maßstäben beschränkt. Abb. 4 zeigt eine Zahlenmauer mit mehr als drei Stockwerken und großen Lücken. In solchen Fällen wird ein analytischer Umgang mit dem Unbestimmten im ursprünglichen Sinne für den Normalverbraucher anspruchsvoll, obwohl Mathematiker der Antike es hier zu akrobatischen Leistungen gebracht haben sollen, wobei meist kontextbezogen, vor allem mit geometrischen Vorstellungen, gearbeitet wurde. Diophants Methode, alle gesuchten Größen als Funktionen einer Unbekannten darzustellen, ist auch nicht anwendbar, weil das Herausfinden dieses Zusammenhanges zur Lösung gehör



Fülle die Zahlenmauer mit natürlichen Zahlen aus.

Geht das auf verschiedene Arten? Auf wie viele?

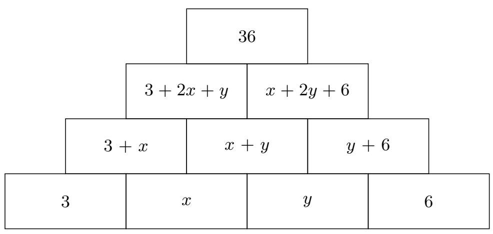


Abb. 4: Zahlenmauer mit großen Lücken

3. Der Schritt zur vollen Allgemeinheit

Viète (1540–1603) knüpfte an die antike Methode der Analysis an und entwickelte diese in einer Weise weiter, die den Vorgehensweisen Diophants deutlich überlegen war, weil er Probleme in voller Allgemeinheit darstellen und behandeln konnte und nicht auf generische Beispiele beschränkt war. Das oben dargestellte Problem der Zahlzerlegung würde mit den Methoden von Viète so aussehen (Bos und Reich 1990, S. 192):

> Wenn die Differenz zweier Seiten und deren Summe gegeben ist, die Seiten zu finden.
> Es sei D als die Differenz zweier Seiten und S als deren Summe gegeben. Man soll die Seiten finden.
> Die kleinere Seite sei A, also ist die größere A + D.
> Aber die Summe ist gegeben als S. Also ist 2A + D = S.
> Mittels Antithesis wird daraus 2A = S – D und nach Halbierung ist A = ½ S – ½ D.

Viète hatte also den Variablenbegriff so allgemein gefasst, dass er damit nicht nur die gesuchte Unbekannte, sondern ganze Familien von Zahlen in komprimierter Form darstellen konnte. Man beachte, dass er damit nicht nur ein allgemeines Lösungsverfahren für den betrachteten Problemtyp entwickelt, sondern auch einen Bauplan erhält, wie sich die gesuchte Größe A aus den gegebenen Größen D und S zusammensetzt. Für Zahlenmauer in Abb. 4 erhielte man mit diesen Möglichkeiten einen allgemeinen Bauplan (Abb. 5).

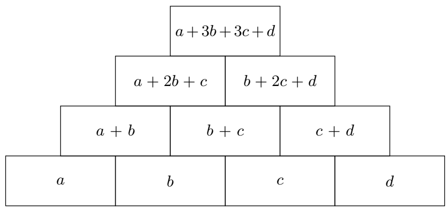


Abb. 5: Vierstöckige Zahlenmauer, allgemein

In einem entscheidenden Punkt blieb Viète jedoch den Denkweisen seiner Vorfahren verhaftet. In dem zitierten Beispiel fällt auf, dass seine Sprechweise von geometrischen Vorstellungen unterlegt ist. Nach dem hier geltenden „Homogenitätsgesetz" konnten nur dimensionsgleiche Größen addiert und subtrahiert werden und die Operation Multiplikation bewirkte einen Dimensionssprung. Diese Sichtweisen behinderten die Ausdehnung algebraischer Methoden von den Zahlen auf allgemeine abstrakte Größen.

Descartes (1596–1650) beseitigte dieses Hindernis und bot eine neue Interpretation der Operationen Multiplikation und Division an, die das Problem des Dimensionssprunges umgeht. Dazu erklärte er die Grundrechenarten sowie das Ziehen von Quadratwurzeln nach Einführung einer Einheitslänge als Operationen auf Strecken (zum Beispiel erfolgte die Multiplikation zweier Strecken mit Hilfe einer Strahlensatzkonfiguration), so dass das Ergebnis wieder eine Strecke ist. Auf diese Weise konnten Potenz- und Wurzelausdrücke höherer Ordnung, wie zum Beispiel $\sqrt[3]{a-bc^5}$, als sinnvolle Operationen mit Zahlen gedacht werden (Alten et al., 2003, S. 279).

Dabei hatte Descartes auch großes Interesse an Notationen „die dem Intellekt und dem Gedächtnis helfen sollten, komplizierte Probleme zu bewältigen" (Bos und Reich, 1990, S. 214). Er führte viele Bezeichnungen ein, die wir auch heute noch gebrauchen und die nicht nur abgekürzte Formen sprachlicher Aussagen, sondern eigenständige symbolische Ausdrücke waren. Er bezeichnete die Variablen mit den letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z, verwendete durchgehend die Zeichen „+" und „–", die heutige Potenzschreibweise sowie das

Quadratwurzelzeichen und formulierte Regeln für den Gebrauch der Symbole. So trug er wesentlich zur „modernen Mathematik der Variablen“ bei (Alten et al., 2003, S. 277).

> „’Symbolik’ sollte dabei nicht zu oberflächlich, lediglich als Notationsform, sondern in ihrer begrifflichen Bedeutung verstanden werden. Die systematische Begründung eines symbolischen Bereiches algebraischer Terme, Operationen und Regeln/Sätze in erster Linie aus der Beziehung der Symbole untereinander und nicht mehr *primär* aus deren Bezügen zur vorausgesetzten geometrischen oder arithmetischen Wirklichkeit war das Neue dieser Periode.“ (Scholz, 1990, S. 153)

Das Lösen des symbolischen Rechens aus den Bezügen zu einer vorausgesetzten Wirklichkeit ist jedoch ein nicht zu unterschätzendes didaktisches Problem. Der Nachvollzug von 4000 Jahren Entwicklungsgeschichte der Algebra in sieben bis acht Schuljahren ist nicht frei von Hürden. Deshalb wollen wir im folgenden Abschnitt diese Entwicklung einmal aus der Perspektive einer individuellen Lerngenese verfolgen.

4. Umgang mit Variablen in der individuellen Lerngenese

Experimente mit geometrischen Musterfolgen zeigen ähnlich wie die geschilderte Fallstudie mit den Zahlenmauern, dass die genannten Denkstrukturen sich bei Kindern schon ab Klasse 5 (oder früher) anbahnen lassen und sich im günstigen Fall ähnlich wie in der Wissenschaftsgeschichte in Richtung fortschreitender Allgemeinheit weiter entwickeln lassen (Berlin 2010, Radford 2010). Aus der Dissertation von T. Berlin (2010) stammt das folgende Beispiel von der Würfelschlange.

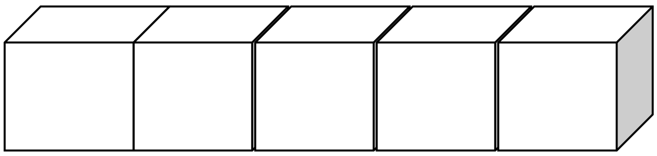


Abb. 6: Würfelschlange

Auf dem Tisch liegen Holzwürfel gleicher Größe. Zuerst soll die Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einem Würfel bestimmt werden. Da eine Seite des Würfels verdeckt wird, wenn dieser auf dem Tisch liegt, sind von den sechs quadratischen Seiten nur noch fünf zu sehen. Dann werden Würfelschlangen wachsender Länge gebildet, indem man einen bereits auf dem Tisch liegenden Würfel nach und nach durch Heranschieben weiterer Würfel ergänzt. Mit jedem Würfel soll die Anzahl der sichtbaren Quadrate notiert und der Anzahl der Würfel gegenübergestellt werden. Dabei zeigen sich Gesetzmäßigkeiten, die zu Verallgemeinerungen Anlass geben. In vorangegangenen Beispielen haben die Kinder bereits die Möglichkeit kennen gelernt, die Variable n für eine beliebige natürliche Zahl als Beschreibungsmittel zu verwenden.

In der ersten Begegnung werden die Figuren in der Wahrnehmung so strukturiert, dass eine Regelmäßigkeit erkennbar wird. Diese Denkhandlung äußert sich in zeigenden, rhythmischen Gesten und wird nicht unbedingt durch sprachlich explizite Ausdrucksformen begleitet. Die vorgenommene Gliederung kann statisch oder dynamisch orientiert sein.

- Bei statischer Strukturierung wird die Figur beispielsweise in drei Reihen von Quadraten plus zwei Endquadrate eingeteilt.
- Die dynamische Sicht achtet auf die progressive Veränderung von Figur zu Figur und stellt fest, dass in jedem Schritt drei Quadrate hinzukommen.

Dabei bildet sich implizites Wissen:

- Gelingt es den Probanden, die erkannte Regelmäßigkeit zu verallgemeinern und auf nicht sichtbare Figuren mit höheren Ordnungsnummern zu übertragen, können sie die Anzahl der Quadrate für die zehnte, hundertste … Figur berechnen.

- Sie verwenden eine Formel, die noch nicht in expliziten Ausdrucksformen repräsentiert zu sein braucht, wohl aber als implizites situationsbezogenes Handlungswissen zur Verfügung steht.

Eine neue Entwicklungsstufe ist der explizite Diskurs. Darauf zielt die Aufforderung, für einen abwesenden Schüler eine Anleitung zu schreiben, wie man die Anzahl der Quadrate in einer beliebigen Figur findet. Diese Aufgabe macht die Unbestimmtheit zum Gegenstand eines expliziten Diskurses.

Im gelingenden Fall wird in Gedanken ein Objekt „allgemeine Figur“ der Musterfolge konzipiert, die „Figurennummer“ wird als Variable in Gebrauch genommen und es werden funktionale Beziehungen identifiziert, zum Beispiel zwischen der Figurennummer und der Anzahl der Quadrate in einer Reihe.

An die Stelle der hinweisenden Gesten treten deskriptive Begriffe und es entstehen Beschreibungen wie die folgenden (die zunächst holprig und unvollständig sein können):

- *Statische Strukturierung:* Jede Würfelschlange hat auf der vorderen, der oberen und der hinteren Seite so viele sichtbare Quadrate wie die Figurennummer angibt, dazu kommen noch zwei Quadrate an den Enden.
- *Dynamische Strukturierung:* Der erste Würfel hat fünf sichtbare Quadrate. Durch Anlegen jedes weiteren Würfels kommen drei neue Quadrate hinzu.

Auf diese Weise entsteht eine neue Form des algebraischen Denkens, die eine explizite begriffliche Ebene erreicht, aber in der Regel zunächst kontextbezogen bleibt. Ihre Artikulationsformen sind verbal („Wortformeln“), können aber auch Symbole einbeziehen.

Der Übergang zu einer Darstellung in der algebraischen Standardsymbolik erfordert noch einmal einen grundlegenden Wechsel des Beschreibungssystems:

- $n+n+n+2$ oder $n+2+n+n$ in der statischen Strukturierung;
- $5+(n-1)\cdot 3$ oder $4+(n-1)\cdot 3+1$ in der dynamischen Strukturierung.

Die gewonnenen Formeln haben für die Schülerinnen und Schüler zunächst oft einen *narrativen Charakter*. Sie sind ikonisch in dem Sinne, dass sie als Nachbildungen der Figurengeometrie aufgefasst werden. Deshalb haben die Probanden oft Blockaden, Klammern zu beseitigen oder die Terme weiter zusammenzufassen.

Der Übergang von ikonisch gedachten zu symbolischen Formeln erfordert den Wechsel von einer narrativen zu einer relationalen Sicht, die, gepaart mit den oben geschilderten Objektivierungsprozessen, den Formeln eine neue abstrakte Bedeutung verleiht. Dann ist auch das Argument, dass man „nicht weiß, wie groß n ist“, kein Hinderungsgrund mehr, $n+2n$ zu $3n$ zusammen zu fassen. Terme werden als Objekte eines Symbolsystems mit einer eigenen, auf den arithmetischen Grundgesetzen beruhenden Regelhaftigkeit verstanden. Diese gestattet es, Formeln zu vereinfachen, umzuformen und zu vergleichen. Die Gleichwertigkeit der Terme $n+n+n+2$ und $5+(n-1)\cdot 3$ kann dann auf symbolischer Ebene ermittelt werden, ohne dass auf Beschreibungsadäquatheit in der Ursprungssituation zurückgegriffen zu werden braucht.

Hierbei muss ein zweiter grundlegender Ablösevorgang vollzogen werden:

- In der Grundschule wird die Ablösung der Zahl von den gezählten Dingen und eine symbolische Selbstständigkeit des Zahlenrechnens angestrebt.
- Im nächsten Schritt geht es um die Ablösung des algebraisch-symbolischen Rechnens von den konkreten Zahlen.

Die Schwierigkeit dieses zweiten Schrittes ist Ursache so manchen Mathe-Traumas. Oft reißt für Schülerinnen und Schüler hier der Kontakt zu Sinn und Bedeutung des Tuns ab. Wer häufig Mathe-Arbeiten korrigiert, kennt Fehlermuster der folgenden Art:

$$3ab + 5ab = 8a^2b^2$$
$$ab + 5ab = 5ab$$
$$\frac{sinx}{x} = sin1$$

Umgekehrt werden algebraische Ausdrücke leicht als Situationsbeschreibungen missdeutet. Buchstaben werden dann als Abkürzungen für Objekte und nicht als Stellvertreter für Zahlen aufgefasst und Rechenzeichen als Abkürzungen für Beziehungen zwischen diesen Objekten gesehen. Das zeigten schon Fischer und Malle (1985) in einer Interviewstudie, aus der der folgende Auszug stammt (ebd., S. 37):

> Einer Probandin wird sinngemäß folgende Frage gestellt: „In einem Saal sind Frauen und Männer. Sei f die Anzahl der Frauen, m die Anzahl der Männer. Was bedeutet dann die Gleichung $f + m = 2$?“ Die Probandin überlegt eine Weile und sagt dann: „Die Frau hat einen Mann und zwei Kinder“. Sie interpretiert die Gleichung als Situationsstenogramm und nicht als Ausdruck einer Zahlbeziehung.

Diese „Buchstabe-als-Objekt-Fehlvorstellung“ wird vielfach in der Literatur belegt und ist nach wie vor ein virulentes Problem (Arcavi et al, 2017, S. 50 ff.). Diese Befunde haben jedenfalls dazu geführt, dass Algebra im Unterricht nicht mehr nur als Termumformungsdrill praktiziert wird, sondern dass dem Aufstellen und Interpretieren von Formeln in Bezug auf inner- und außermathematische Sachsituationen besonderes Augenmerk gilt.

Ein flexibler Umgang mit Formeln zunehmender Komplexität und ein effektiver Einsatz der Algebra als Werkzeug erfordert dann weiter die Ausbildung eines verfeinerten Sinnes für Termstrukturen.

5. Sinn für Termstrukturen und Symbolgebrauch

Ein Sinn für Termstrukturen und Symbolgebrauch (structure sense, symbol sense) beinhaltet u. a. folgende Fähigkeiten (Linchevski & Livneh 1999, Hoch & Dreyfus 2004, Arcavi 1994)

- Die *Fähigkeit, in einem algebraischen Ausdruck Teilterme so zu Einheiten zu bündeln, dass eine nutzbare Grundstruktur erkennbar wird*. So kann der Term $u^2v^4 + 2uv^2w + w^2$ nach der 1. Binomischen Formel in $(uv^2 + w)^2$ verwandelt werden, wenn das Produkt uv^2 als Einheit gesehen wird.
- Eine *Lesefähigkeit für symbolische Ausdrücke,* die es ermöglicht, diese sinnvoll zu interpretieren und Informationen aus ihnen abzulesen. Mit geschärftem Blick kann man ablesen, dass eine Zahl der Form $4n(n+1)$ nicht nur durch 4, sondern sogar durch 8 teilbar sein muss, weil n *und* $n+1$ zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen darstellen, von denen eine gerade ist.
- Ein *Gefühl für die passende Wahl von Symbolen.* Es hängt z. B. von der jeweiligen Problemstellung ab, ob man eine rationale Zahl als a oder als Bruch p/q aus ganzen bzw. natürlichen Zahlen darstellt.

Solche Fähigkeiten sind die Voraussetzung für einen weiterführenden Einsatz der algebraischen Werkzeuge.

6. Argumentieren und Beweisen mit algebraischen Methoden

Das Spektrum elementar-algebraischer Methoden, zu dem Viète und Descartes seinerzeit den Anstoß gegeben haben, kommt bei dem anspruchsvollen Unterrichtsthema quadratische Gleichungen voll zur Geltung. Mit einem Symbolsystem, das Variablensymbole sowohl für gegebene wir für gesuchte Größen und Operationssymbole für arithmetische Operationen enthält, ist es möglich, alle quadratischen Gleichungen unter eine gemeinsame Normalform zu fassen:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Mit dem formal durchgeführten Lösungsverfahren der quadratischen Ergänzung gelangt man zur allgemeinen Lösungsformel, in der der Werkzeugcharakter des symbolischen Kalküls deutlich wird:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Eine solche Herleitung erfordert jedoch einen Sinn für Termstrukturen und deren arithmetischem Gefüge (siehe oben). Eine weitere entscheidende Denkfähigkeit besteht darin, einen Ausdruck, z. B. $b^2 - 4ac$, nicht nur als eine mit den Unbekannten auszuführende Operation, sondern auch als deren Ergebnis anzusehen und dieses seinerseits wieder als Gegenstand von Operationen zu betrachten, hier z. B. zum Wurzelziehen. Das bedeutet, dass gedachte Rechenopertionen in objektähnliche Gegenstände eigenen Rechts verwandelt werden („Verdinglichung“ oder „Objektivierung“ (Sfard, 1995; Radford, 2010)). Für diese Entwicklung von einer auszuführenden Operation zu einem denkbaren Konzept hat Tall (2013) den englischen Ausdruck "procept" geprägt.

Ist nun die Lösungsformel mit dem nötigen Umformungsgeschick hergeleitet, hat man im Sinne des Eingangszitates zwei Vorgänge vereint: Man hat ein Lösungsverfahren erarbeitet und zugleich dessen Richtigkeit bewiesen. Die Rechtfertigung ist durch das regelgeleitete Vorgehen, basierend auf den Grundgesetzen der Arithmetik, garantiert. In diesem Sinne tragen Termumformungen einen Beweischarakter in sich, weil man sie als Schlussfolgerungen in einem formalen Kalkül auffassen kann (Rüede 2015, S. 5).

Damit sind die Entdeckungsmöglichkeiten aber noch nicht zu Ende. Die gewonnene Lösungsformel zeigt nicht nur, wie die Lösungen einer Gleichung aus ihren Koeffizienten ermittelt werden können, sie eröffnet auch Ansätze zur Untersuchung der Frage, unter welchen Bedingungen eine Gleichung eine, zwei oder gar keine Lösung hat, was eine entsprechende Lesefähigkeit für symbolische Ausdrücke erfordert. Der Doppelcharakter der Formel als Lösungsschema und Explorationsgegenstand ist eine weitere Ausprägung dessen, was Tall mit dem Kunstwort "procept" (s. o.) meinte.

7. Algebraisches Argumentieren und funktionales Denken

Eine neue Reichweite erlangt algebraisches Denken, wenn es sich mit funktionalem Denken verbindet und Variable nicht nur als allgemeine unbestimmte oder unbekannte Zahlen, sondern auch als veränderliche Größen betrachtet. Der Funktionsbegriff ist einer der weitestreichenden Begriffe der Mathematik. Durch diese Verbindung wird es möglich, Zusammenhänge rational zu klären, die intuitiv nicht so einfach zugänglich sind.

Betrachtet man nun den quadratischen Term $ax^2 + bx + c$ als Funktionsterm einer quadratischen Funktion f, so kann man anhand der Koeffizienten Aussagen über den Funktionsverlauf machen. Das wird ermöglicht durch Umformen des Funktionsterms in die äquivalente Scheitelpunktform:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Diese zeigt, wie die beschriebene Parabel durch geometrische Transformationen aus der Normalparabel hervorgeht, nämlich durch

- Verschiebung um $-\frac{b}{2a}$ in x-Richtung,
- Streckung mit dem Faktor a (falls a negativ ist, handelt es sich um eine Streckspiegelung, die die Öffnungsrichtung umkehrt),
- Verschiebung um $c - \frac{b^2}{4a}$ in y-Richtung.

So kann man drei Merkmale ablesen, die die Gestalt der Parabel wesentlich bestimmen: Den Streckfaktor, die Öffnungsrichtung und den Scheitelpunkt mit den Koordinaten $S(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a})$.

Diese Beispiele zeigen, „dass sich formales algebraisches Denken durch eine besondere Weise des Herstellens von Bezügen innerhalb eines algebraischen Ausdrucks kennzeichnet, die u. U. zu inhaltlichen oder innermathematischen Bedeutungen führt.“ [Meyer 2015, S. 23] Dazu sind zielgerichtetes Umformen und anschließende Interpretation in Bezug auf das Ausgangsproblem erforderlich. Gerade in diesen Tätigkeiten zeigt sich Expertise im Umgang mit der Formelsprache [vgl. hierzu Rüede 2015].

Eine Ausweitung des Explorationsfeldes ergibt sich, wenn man statt einer einzelnen Parabel eine Parabelschar betrachtet, zum Beispiel

$$f_t(x) = x^2 - tx + 3t, \qquad t \in \mathrm{IR}, t \neq 0.$$

wobei der Parameter t variiert und so die sich ändernden Positionen der Parabel bestimmt. Die zugehörige Scheitelform lautet

$$f_t(x) = (x - \tfrac{t}{2})^2 + 3t - \tfrac{t^2}{4},$$

d. h. die Scheitelpunkte der Scharparabeln lassen sich in Abhängigkeit von t in der Form $S(\frac{t}{2};\ 3t - \frac{t^2}{4})$ darstellen. Dabei wird der Scharparameter t zur „Veränderlichen“ in einer neuen funktionalen Beziehung. Mit diesen Informationen kann man sich schnell ein Bild vom Verlauf der Parabelschar machen (Abb. 7).

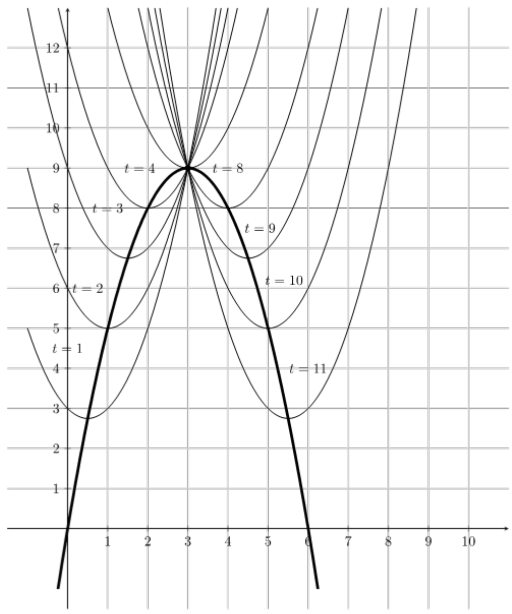


Abb. 7: Parabelschar

Dabei fallen zwei Beobachtungen ins Auge:

1. Alle Parabeln verlaufen anscheinend durch den Punkt P(3; 9).
2. Die Scheitelpunkte der Scharparabeln liegen offenbar wieder auf einer Parabel.

Beide Beobachtungen lassen sich auf symbolischer Ebene bestätigen. Im ersten Fall setzt man einfach die Koordinaten von P in die Schargleichung ein und erhält unabhängig von der Wahl von t die Beziehung

$$f_t(3) = 9 - 3t + 3t = 9.$$

Hierbei wird der Scharparameter zur „Unbekannten“ in einer Bestimmungsgleichung. Im zweiten Fall macht man sich klar, dass die zweite Koordinate des Scheitelpunktes tatsächlich quadratisch von der ersten abhängt. Substitution von $\frac{t}{2}$ durch r und Einsetzen von $2r$ für t in den Term für die zweite Koordinate des Scheitelpunktes ergibt

$$6r - r^2 = -(r-3)^2 + 9,$$

also eine quadratische Funktion von r. Deren Graph ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt S(3;9), wie im Bild ersichtlich.

Auf diese Weise kann man mit Hilfe der algebraischen Formelsprache einen mathematischen Gegenstandsbereich erkunden. Um das Potential effizient zu nutzen, sind allerdings mannigfache Denkhandlungen des Darstellens, Strukturierens, Umstrukturierens und Deutens wie auch ein flexibler Umgang mit den verschiedenen Aspekten des Variablenbegriffs erforderlich. Dann aber entwickelt die Formelsprache ihre Doppelfunktion als Darstellungsmittel und Werkzeug, die Krämer (2003) in dem Begriff der operativen Schrift zusammenfasst:

> „Die operative Schrift ist nicht nur ein Beschreibungsmittel, sondern zugleich ein Werkzeug des Geistes, eine Denktechnik und ein Intelligenzverstärker.“ (Krämer, 2003, S. 171)

8. Fragen zur bildungstheoretischen Einordnung

Das Potential der Formelsprache, „Denktechnik und Intelligenzverstärker“ zu sein, hat dazu geführt, dass elementare Algebra fester Bestandteil des Mathematikunterrichts an weiterführenden Schulen ist. Daraus ergeben sich Fragen, die durch die Verfügbarkeit von Computer-Algebra-Systemen an Dringlichkeit zunehmen, die aber noch längst nicht ausdiskutiert sind:

Wie viele algebraische Fähigkeiten benötigen wir

- im Interesse von „mathematical literacy“,
- zum Erwerb von Studierfähigkeit,
- zum Verständnis dessen, welche Rolle Mathematik heute in der Welt spielt?

Die Tatsache, dass die Entwicklung der Formelsprache der umfassenderen Idee der Formalisierung geschuldet ist und dass mit dieser Idee die Grundlage der Digitalisierung gelegt wurde, eröffnet noch einen viel weiteren Fragehorizont: Welchen Einfluss hat die Digitalisierung auf unser Leben – jetzt und in Zukunft?

Hinweis: Die Ausführungen beruhen weitgehend auf den Publikationen (Hefendehl-Hebeker, 2022) und (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2023).

Literatur

Alten, H.-W., Djafari Naini, A., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H., & Wußing, H. (2003). *4000 Jahre Algebra. Geschichte – Kulturen – Menschen*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-38239-0

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017): The Learning and Teaching of Algebra. London, New York: Routledge.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 14(3), 24–35. https://www.jstor.org/stable/40248121

Berlin, T. (2010). *Algebra erwerben und besitzen. Eine binationale empirische Studie in der Jahrgangsstufe 5*. Universität Duisburg-Essen, Duepublico, Dissertation.

Bos, H., & Reich, K. (1990). Der doppelte Auftakt zur frühneuzeitlichen Algebra: Viète und Descartes. In E. Scholz (Hrsg.), *Geschichte der Algebra. Eine Einführung* (S. 183–234). BI-Wissenschaftsverlag.

Fischer, R., & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Bibliographisches Institut.

Hefendehl-Hebeker, L. (2022). Elementare Algebra – Werkzeug zum Umgang mit dem Unbestimmten. In: Bauer, S. & Büchter, A. (Hrsg.). Themenheft Elementare Algebra. *Der Mathematikunterricht 68, 3*, 3 – 15.

Hefendehl-Hebeker, L. & Rezat, S. (2023). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.). Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 123 – 158). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Hoines, A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proceedings of the annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: July 14–18, 2004, Bergen, Norway* (Vol. 3, S. 49–56).

Krämer, S. (2003). >Schriftbildlichkeit< oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift. In S. Krämer & H. Bredekamp (Hrsg.), *Bild – Schrift – Zahl* (S. 157-176). München: Wilhelm Fink Verlag.

Krämer, S. (1988). *Symbolische Maschinen: Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriss.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–196. http://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Meyer, A. (2015). *Diagnose algebraischen Denkens.* Von der Diagnose- zur Förderaufgabe mithilfe von Denkmustern. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: V. Durand-Guerrier, S. Soury- Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 6, January 28 - February 1, 2009) (pp. XXXIII – LIII). Institut National de Recherche Pédagogique and ERME.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, & R. Lins (Hrsg.), *Perspectives on School Algebra* (S. 13–63). Kluwer Academic Publishers.

Rüede, C. (2015). *Strukturierungen von Termen und Gleichungen: Theorie und Empirie des Gebrauchs algebraischer Zeichen durch Experten und Novizen*. Springer.

Scholz, E. (Hrsg.). (1990). *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*. BI-Wissenschaftsverlag.

Sesiano, J. (1990). Frühalgebraische Aspekte in der „Arithmetica" Diophants. In E. Scholz (Hrsg.), *Geschichte der Algebra. Eine Einführung* (S. 81–96). BI-Wissenschaftsverlag.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* 15–39. http://dx.doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Sjuts, J. (2006). Diagnostische und didaktische Kompetenz auf Forschungsbasis: das Beispiel Zahlenmauern. In: Rieß, F. (Hrsg.): *Einblicke in aktuelle Forschungszusammenhänge zum Mathematikunterricht.* Didaktisches Zentrum (diz), Oldenburg, S. 21-37.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Pres