Die besondere Wirkmächtigkeit des algebraischen Denkens

Lisa Hefendehl-Hebeker

Karlsruhe (KIT) ▪ 20.02.2025

Einleitung

„… eine für die neuzeitliche Wissenschaft konstitutive und vorbildlose Neuerung: *die mathematische Formel.*“

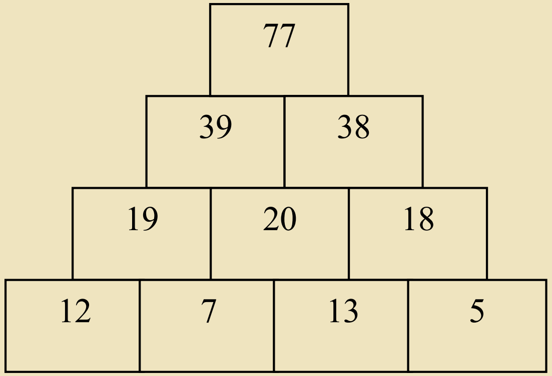
(Krämer 1988, S. 72)

Thema des Vortrages:

- Worin besteht die besondere Wirkmächtigkeit der mathematischen Formel?
- Welche Denkweisen sind für eine verständige Handhabung erforderlich?
- Wie können diese im Mathematikunterricht angebahnt werden?

1. Präalgebraisches Denken

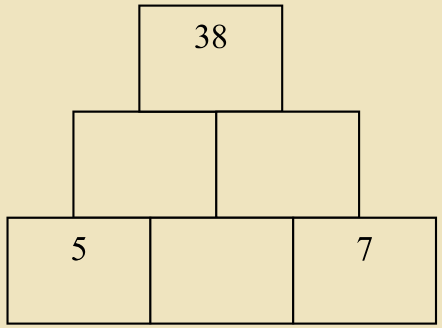
Zahlenmauern



- Bewährtes Aufgabenformat,
- im MU vielfältig einsetzbar
- Lerngelegenheiten für unterschiedliche Jahrgangsstufen und Schwierigkeitsgrade.

1. Präalgebraisches Denken

Zahlenmauer mit Lücken in Kl. 5 (Sjuts, 2006):



Torsten: „Die Differenz zwischen *5* und *7* beträgt 2. So müssen die oberen Zahlen auch eine Differenz von *2* haben, weil *5* und *7* mit der gleichen Zahl addiert werden. Nur *18* und *20* haben eine Differenz von *2* und geben zusammen *38*. Dann ist das *13*, weil *5+13=18* und *7+13=20.*“

Karen: *„5+7=12, 38-12=26, 26:2=13,* weil die Zahl zweimal gebraucht wird. Einmal bei der *5* und einmal bei der *7.*“

Die Strategien der Kinder:

- Die erkannten strukturellen Beziehungen zwischen den vorhandenen und gesuchten Einträgen nutzen, um *die gesuchte Zahl* in der untersten Reihe zu finden.
- Die Argumentationen repräsentieren ein frühes, aber entscheidendes Stadium in der Entstehung algebraischer Denkweisen (Mesopotamien, Ägypten, Griechenland, Diophant).

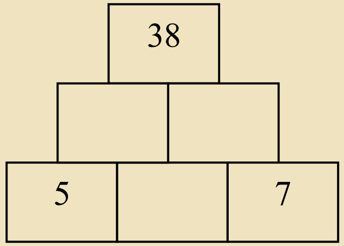
Radford (2010): Kern der Erkenntnisleistungen ist der „analytische Umgang mit dem Unbestimmten“:

- Mit unbestimmten Zahlen oder Größen, mit denen nicht numerisch gerechnet werden kann, wird relational operiert.
- Sie werden als normale Zahlen oder Größen angesehen, man betrachtet, wie sie sich in einem arithmetischen Gefüge bewegen.

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Torsten und Karen tun das auf je eigene Weise:

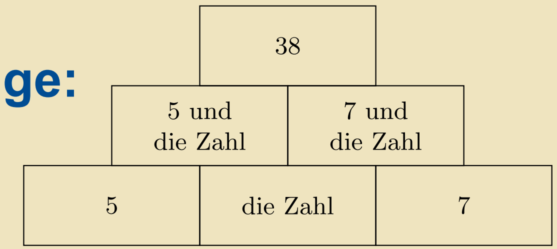


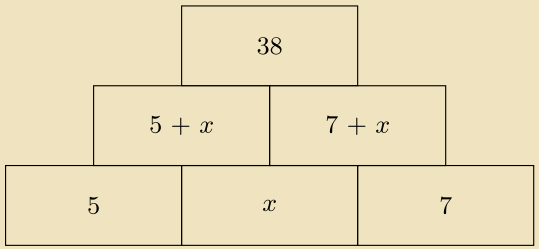
- Torsten achtet auf die Konstanz der Differenz, also auf die Fortsetzung arithmetischer Relationen.
- Karen arbeitet explizit mit dem Konzept „der (gesuchten, unbekannten) Zahl" und löst diese schrittweise aus ihren Verknüpfungen mit den gegebenen Zahlen 5, 7 und 38 heraus.

Präalgebraische Denkweisen:

- Vertiefung des Umgangs mit der Arithmetik,
- Training der Problemlösefähigkeit,
- Grundlagen für einen verständigen Umgang mit algebraischen Methoden.

Schwellenübergänge:





$38 = 5+x+7+x$
$38 = 12 + 2x$
$2x = 26$
$x = 13$

Diophant (um 250 n. Chr.):

- Wesentlicher Schritt über das frühe Stadium der unbestimmten Analytik hinaus.
- Entwicklung des Konzeptes der (gesuchten, unbekannten) „Zahl“, losgelöst von den kontextbezogenen Größen früherer Generationen.
- Bezeichnung durch Buchstaben, Rechnen „als ob“ es bekannte Zahlen seien; nach Radford (2010) ein weiteres wichtiges Stadium.
- Prinzip des Lösens einer Gleichung durch Umformen.

Beispiel:

Eine gegebene Zahl ist in zwei Teile zu teilen, deren Differenz gegeben ist.

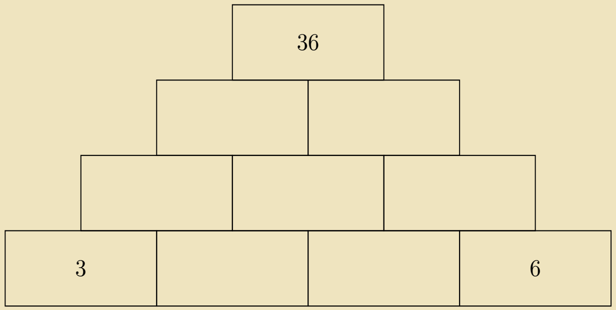
- Es sei die gegebene Zahl 100, die Differenz sei 40 *(Generisches Beispiel).*
- Man setze die kleinere A, die größere sei folglich A + 40.
- Die Summe ist gegeben als 100. Folglich ist 100 = 2A + 40.
- Von Ähnlichem ziehe Ähnliches ab: von 100 subtrahiere 40, es folgt 2A = 60, woraus sich A = 30 ergibt.

2. Rechnen mit der unbekannten Zahl

Bewertung:

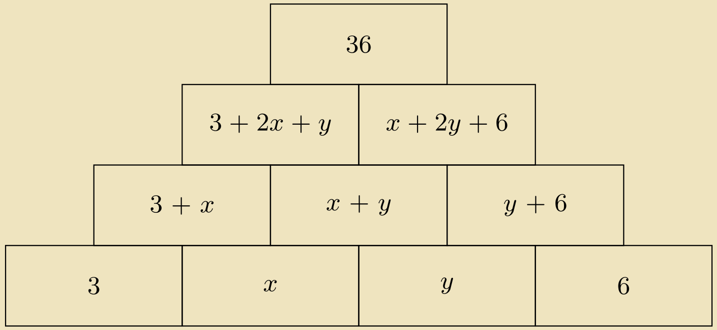
- Großer Fortschritt (jedoch ohne systematische Vollständigkeit)
- Dennoch begrenzte Möglichkeiten: Probleme, in denen die gesuchten Größen als Funktionen einer Unbekannten darstellbar sind.

Beispiel:



Fülle die Zahlenmauer mit natürlichen Zahlen aus.

Geht das auf verschiedene Arten? Auf wie viele?



- Analytischer Umgang mit dem Unbestimmten wird anspruchsvoll,
- Funktion einer Unbekannten nicht ersichtlich.

3. Der Schritt zur vollen Allgemeinheit

Viète (1540 – 1603):

Weiterentwicklung der Methoden so, dass er Probleme in voller Allgemeinheit darstellen und behandeln konnte.

Neubearbeitung von Diophants Beispiel von der Zahlzerlegung:

Wenn die Differenz zweier Seiten und deren Summe gegeben ist, die Seiten zu finden.

- Es sei D als die Differenz zweier Seiten und S als deren Summe gegeben. Man soll die Seiten finden.
- Die kleinere Seite sei A, also ist die größere A + D.
- Aber die Summe ist gegeben als S. Also ist 2A + D = S.
- Mittels Antithesis wird daraus 2A = S – D und nach Halbierung ist A = ½ S – ½ D.

Fortschritt:

Variablenbegriff so allgemein gefasst, dass er nicht nur die gesuchte *Unbekannte,* sondern *ganze Familien von Zahlen* in symbolischer Form darstellen konnte. Damit

- allgemeines Lösungsverfahren für den betrachteten Problemtyp,
- zugleich ein Bauplan, wie sich die gesuchte Größe A aus den gegebenen Größen S und D zusammensetzt.

Beschränkung: In einem wesentlichen Punkt Befangenheit in den Denkweisen der Vorfahren:

„Homogenitätsgesetz“: Nur dimensionsgleiche Größen konnten addiert und subtrahiert werden, und die Operation Multiplikation bewirkte einen Dimensionssprung.

3. Der Schritt zur vollen Allgemeinheit

Descartes (1596 – 1650):

Beseitigt das Hindernis durch eine neue Interpretation der Grundrechenarten und das Ziehen von Wurzeln als Operationen auf Strecken.

Entwicklung von Notationen, „die dem Intellekt und dem Gedächtnis helfen sollten, komplizierte Probleme zu bewältigen.“

Wesentlicher Beitrag zur modernen Mathematik der Variablen.

> „’Symbolik’ sollte dabei nicht zu oberflächlich, lediglich als Notationsform, sondern in ihrer begrifflichen Bedeutung verstanden werden. Die systematische Begründung eines symbolischen Bereiches algebraischer Terme, Operationen und Regeln/Sätze in erster Linie aus der Beziehung der Symbole untereinander und nicht mehr *primär* aus deren Bezügen zur vorausgesetzten geometrischen oder arithmetischen Wirklichkeit war das Neue dieser Periode.“ (Scholz, 1990, S. 153)

3. Der Schritt zur vollen Allgemeinheit

Bauplan einer (vierstufigen) Zahlenmauer in voller Allgemeinheit:

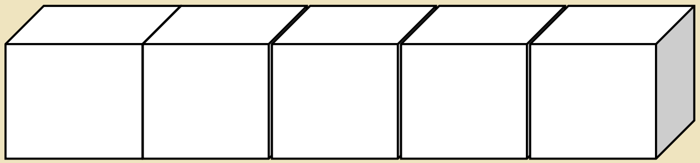
$a+3b+3c+d$			
$a+2b+c$	$b+2c+d$		
$a+b$	$b+c$	$c+d$	
a	b	c	d

Jedoch: Das Lösen des symbolischen Rechnens aus seinen Bezügen zur Wirklichkeit ist ein nicht zu unterschätzendes didaktisches Problem!

Umgang mit Variablen:

- Anbahnung ab Klasse 5 möglich (arithmetische und geometrische Musterfolgen),
- Weiterentwicklung in Richtung fortschreitender Allgemeinheit.

Beispiel Würfelschlange (Berlin, 2010):



Auf dem Tisch liegen Holzwürfel gleicher Größe.

- Daraus werden schrittweise Würfelschlangen wachsender Länge gebildet.
- Mit jedem neuen Würfel soll die Anzahl der sichtbaren Quadrate notiert und der Anzahl der Würfel gegenbergestellt werden.

4. Variable in der individuellen Lerngenese

Bildung von implizitem situationsbezogenem Wissen:

- Figuren werden in der Wahrnehmung so strukturiert, dass eine Regelmäßigkeit erkennbar wird (Andeutung durch zeigende, rhythmische Gesten).
- Gelingt es, die beobachtete Regelmäßigkeit zu verallgemeinern, kann die Anzahl der sichtbaren Quadrate für die zehnte, hundertste Figur berechnet werden.

Neue Entwicklungsstufe: expliziter Diskurs:

- An die Stelle der hinweisenden Gesten treten deskriptive Begriffe.
- Die „Figurennummer“ wird als Variable in Gebrauch genommen.
- Es werden funktionale Beziehungen identifiziert, etwa zwischen der Anzahl der Würfel und der Anzahl der Quadrate in einer Reihe.
- Artikulation in kontextbezogenen Wortformeln.

Wechsel des Beschreibungssystems: Übergang zur Standardsymbolik

- $n+n+n+2$ oder $n+2+n+n$ in der statischen Strukturierung;
- $5+(n-1)\cdot 3$ oder $4+(n-1)\cdot 3+1$ in der dynamischen Strukturierung.

4. Variable in der individuellen Lerngenese

Wesentliche Lernhürde:

- Die gewonnenen Formeln haben für die Lernenden oft einen narrativen Charakter.
- Blockaden, Klammern zu beseitigen oder die Terme weiter zusammenzufassen und die Gleichwertigkeit der Terme $n+n+n+2$ und $5+(n-1)\cdot 3$ auf symbolischer Ebene zu ermitteln.

Zweiter grundlegender Ablösevorgang:

- Grundschule: Ablösung der Zahl von den gezählten Dingen; symbolische Selbstständigkeit der Zahl.
- Sekundarstufe: Ablösung des algebraisch-symbolischen Rechnens von den konkreten Zahlen.

4. Variable in der individuellen Lerngenese

Weitere Lernschritte

- Formaler Umgang mit Termen
- Strukturieren als eigene Fähigkeit

Zentrale Ideen der Algebra:

- Term als „geschichtetes System von Moduln“ (Stekeler-Weithofer 1998)
- Terme als strukturierte Objekte, Rechengesetze, Hierarchien von Operationen, Äquivalenz von Ausdrücken (Rüede 2012).

Bleibende Gefahr von Fehlvorstellungen:

- Buchstabe-als-Objekt-Fehlvorstellung (Arcavi et al, 2017)
- eigenwillige Verfahrensweisen

$3ab + 5ab = 8a^2b^2$

$ab + 5ab = 5\ ab$

„Structure sense“, „Symbol Sense“: (Arcavi, 1994; Hoch & Dreyfus, 2004)

- Die *Fähigkeit, in einem algebraischen Ausdruck Teilterme so zu Einheiten zu bündeln, dass eine nutzbare Grundstruktur erkennbar wird*.

  Beispiel: In dem Term $u^2v^4 + 2uv^2w + w^2$ das Produkt uv^2 als Einheit sehnen, dann nach der 1. Binomischen Formel in $(uv^2 + w)^2$ verwandeln.

- Eine *Lesefähigkeit für symbolische Ausdrücke,* die es ermöglicht, diese sinnvoll zu interpretieren und Informationen aus ihnen abzulesen.

  Beispiel: Eine Zahl der Form $4n(n+1)$ *ist* nicht nur durch 4, sondern sogar durch 8 teilbar.

- Ein *Gefühl für die passende Wahl von Symbolen.*

  Beispiel: Es hängt von der jeweiligen Problemstellung ab, ob man eine rationale Zahl als a oder als Bruch p/q aus ganzen bzw. natürlichen Zahlen darstellt.

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Thema quadratische Gleichungen:

Das Spektrum elementar-algebraischer Methoden kommt hier voll zur Geltung.

- Alle quadratischen Gleichungen unter eine gemeinsame Normalform fassen:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

- Mit dem formal durchgeführten Lösungsverfahren der quadratischen Ergänzung zur allgemeinen Lösungsformel:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

- Wichtige Denkfähigkeit: Ausdrücke wie $b^2 - 4ac$ nicht nur als eine mit den Unbekannten auszuführende Operation, sondern auch als deren Ergebnis anzusehen und dieses wieder als Gegenstand von Operationen zu betrachten. Vom Prozess zum Objekt – „reification“ (Sfard, 1995), „procept“ (Tall, 2013)
- Insgesamt zwei Vorgänge vereint: ein Lösungsverfahren erarbeiten und dessen Richtigkeit beweisen (Termumformungen als Schlussfolgerungen in einem formalen Kalkül – Ruede, 2015).

Weiter: Lösungsformel als Lösungsschema und Explorationsgegenstand.

Neue Reichweite: Verbindung von algebraischem und funktionalem Denken

Neuer Variablenaspekt: *Variable als veränderliche Größe*

Beispiel: Quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$

Scheitelpunktform: anhand der Koeffizienten Aussagen über den Funktionsverlauf machen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \; = \; a(x + \frac{b}{2a})^2 + c \; - \frac{b^2}{4a}.$$

Solche Beispiele zeigen, „dass sich formales algebraisches Denken durch eine besondere Weise des Herstellens von Bezügen innerhalb eines algebraischen Ausdrucks kennzeichnet, die u. U. zu inhaltlichen oder innermathematischen Bedeutungen führt." (Meyer 2015, S. 23)

Formelsprache in ihrer Doppelfunktion als Darstellungsmittel und Werkzeug: „*operative Schrift*" (Krämer, 2003, S. 171):

„Die operative Schrift ist nicht nur ein Beschreibungsmittel, sondern zugleich ein Werkzeug des Geistes, eine Denktechnik und ein Intelligenzverstärker."

8. Fragen zur bildungstheoretischen Einordnung

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Offen im Denken

„ Denkwerkzeug und Intelligenzverstärker“

Wie viele algebraische Fähigkeiten benötigen wir

- im Interesse von „mathematical literacy“,
- zum Erwerb von Studierfähigkeit,
- zum Verständnis dessen, welche Rolle Mathematik heute in der Welt spielt?

Weiterer Horizont: Formalisierung als Grundlage der Digitalisierung:

- Einfluss auf unser Leben – jetzt und in Zukunft?

Literatur

Die Ausführungen beruhen weitgehend auf folgenden Publikationen:

Hefendehl-Hebeker, L. (2022). Elementare Algebra – Werkzeug zum Umgang mit dem Unbestimmten. In: Bauer, S. & Büchter, A. (Hrsg.). Themenheft Elementare Algebra. *Der Mathematikunterricht 68, 3*, 3 – 15.

Hefendehl-Hebeker, L. & Rezat, S. (2023). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.). Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 123 – 158). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3

Weitere Literatur ist dort angegeben.