Die Rolle von negativem Wissen beim Aufbau von algebraischen Einsichten und Fertigkeiten

René Fehlmann, **PH**Bern

Karlsruher Didaktik-Workshop
21. Februar 2025

Kernthese des Vortrags

Ein (wichtiger) Grund für typische Fehler beim Rechnen und Umformen von Termen ist ...

Kernthese des Vortrags

Ein (wichtiger) Grund für typische Fehler beim Rechnen und Umformen von Termen ist ...

fehlendes 'negatives Wissen'!

Übersicht

1 Negatives Wissen

2 Regeln der Algebra / Regeln der Lernenden

3 Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

4 Weitere Beispiele

Negatives Wissen

Negatives Wissen

Negatives Wissen = ‘schlechtes’ Wissen?

Negatives Wissen

Negatives Wissen = ‘schlechtes’ Wissen?

Negatives Wissen = ‘unnützes’ Wissen?

Negatives Wissen

Negatives Wissen = ‘schlechtes’ Wissen?

Negatives Wissen = ‘unnützes’ Wissen?

Negatives Wissen = ‘hinderliches’ Wissen?

Negatives Wissen

Negatives Wissen = ‘schlechtes’ Wissen?

Negatives Wissen = ‘unnützes’ Wissen?

Negatives Wissen = ‘hinderliches’ Wissen?

NEIN!

Negatives Wissen

Fritz Oser / Maria Spychiger

Negatives Wissen

. . . ist das Wissen darüber,

Negatives Wissen

. . . ist das Wissen darüber,

was falsch ist,

Negatives Wissen

. . . ist das Wissen darüber,

was falsch ist,

wie etwas nicht ist oder nicht funktioniert und

Negatives Wissen

. . . ist das Wissen darüber,

was falsch ist,

wie etwas nicht ist oder nicht funktioniert und

was man nicht tun sollte.

Negatives Wissen

(positives) deklaratives Wissen: Wissen wie/was etwas ist	negatives deklaratives Wissen: Wissen wie/was etwas **nicht** ist
(positives) prozedurales Wissen: Wissen wie etwas funktioniert	negatives prozedurales Wissen: Wissen wie etwas **nicht** funktioniert
(positives) konzeptionelles Wissen: Wissen warum etwas geht	negatives konzeptionelles Wissen: Wissen warum etwas **nicht** geht
(positives) strategisches Wissen: Wissen was zur Lösung führt	negatives strategisches Wissen: Wissen was **nicht** zur Lösung führt

Negatives Wissen

Fritz Oser (15.07.1937 – 05.09.2020), Schweizer Pädagoge, Psychologe:

“Man kann etwas wirklich nur aus seinem Gegenteil erkennen!”

Negatives Wissen

Fritz Oser (15.07.1937 – 05.09.2020), Schweizer Pädagoge, Psychologe:

"Um zu wissen, wie etwas funktioniert, muss man gleichzeitig wissen, wie etwas nicht funktioniert!"

Negatives Wissen

Fritz Oser (15.07.1937 – 05.09.2020), Schweizer Pädagoge, Psychologe:

"Negatives Wissen ist ein Bestandteil (und nicht das Gegenteil) von positivem Wissen."

Negatives Wissen

Negatives Wissen wird durch das Lernen aus Fehlern aufgebaut.

Regeln der Algebra

konkretes Beispiel

Für das Rechnen mit (reellen) Zahlen und das Umformen von algebraischen Termen gelten Regeln, zum Beispiel:

Regeln der Algebra

konkretes Beispiel

Für das Rechnen mit (reellen) Zahlen und das Umformen von algebraischen Termen gelten Regeln, zum Beispiel:

$$x + y = y + x \qquad \text{Kommutativgesetz der Addition}$$

Regeln der Algebra

konkretes Beispiel

Für das Rechnen mit (reellen) Zahlen und das Umformen von algebraischen Termen gelten Regeln, zum Beispiel:

$$x + y = y + x \qquad \text{Kommutativgesetz der Addition}$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \qquad \text{Assoziativgesetz der Multiplikation}$$

Regeln der Algebra

konkretes Beispiel

Für das Rechnen mit (reellen) Zahlen und das Umformen von algebraischen Termen gelten Regeln, zum Beispiel:

$x + y = y + x$	Kommutativgesetz der Addition
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Distributivgesetz

Regeln der Algebra

konkretes Beispiel

Für das Rechnen mit (reellen) Zahlen und das Umformen von algebraischen Termen gelten Regeln, zum Beispiel:

$x + y = y + x$	Kommutativgesetz der Addition
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Distributivgesetz
$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	Potenzgesetz

Regeln der Algebra

konkretes Beispiel

Für das Rechnen mit (reellen) Zahlen und das Umformen von algebraischen Termen gelten Regeln, zum Beispiel:

$x + y = y + x$	Kommutativgesetz der Addition
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Distributivgesetz
$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	Potenzgesetz
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	Potenzgesetz

Regeln der Algebra

konkretes Beispiel

Für das Rechnen mit (reellen) Zahlen und das Umformen von algebraischen Termen gelten Regeln, zum Beispiel:

$x + y = y + x$	Kommutativgesetz der Addition
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Distributivgesetz
$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	Potenzgesetz
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	Potenzgesetz
$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	Regel für das Rechnen mit Wurzeln

Regeln der Algebra

konkretes Beispiel

Für das Rechnen mit (reellen) Zahlen und das Umformen von algebraischen Termen gelten Regeln, zum Beispiel:

$x + y = y + x$	Kommutativgesetz der Addition
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Distributivgesetz
$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	Potenzgesetz
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	Potenzgesetz
$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	Regel für das Rechnen mit Wurzeln
$\lvert x \cdot y \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$	Regel für das Rechnen mit Beträgen

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

konkrete Beispiele

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

konkrete Beispiele

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

konkrete Beispiele

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

konkrete Beispiele

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

konkrete Beispiele

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$|x+y| = |x| + |y|$$

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

konkrete Beispiele

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$|x+y| = |x| + |y|$$

$$\log(x+y) = \log x + \log y$$

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

konkrete Beispiele

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$|x+y| = |x| + |y|$$

$$\log(x+y) = \log x + \log y$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$$

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

konkrete Beispiele

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$|x+y| = |x| + |y|$$

$$\log(x+y) = \log x + \log y$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$$

$$-3^2 = 9$$

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

konkrete Beispiele

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$|x+y| = |x| + |y|$$

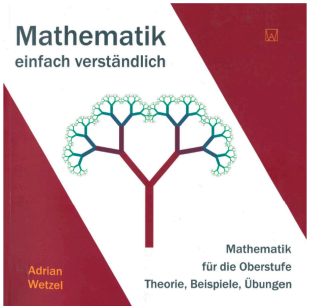
$$\log(x+y) = \log x + \log y$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$$

$$-3^2 = 9$$

Die Liste ist leider nicht abschliessend.

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern



21 Die 10 Sünden der Mathematik

Stünde:	**Korrekter Weg, falls vorhanden:**	**Aber:**
$-3^2 \neq +9$	Klammer-Stünde: $-3^2 = (-1)\cdot 3\cdot 3 = -9$	$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = +9$
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \neq \frac{a \pm c}{b \pm d}$	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d} \pm \frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b} = \frac{a\cdot d \pm c\cdot b}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ (Bruchrechnen!)
$(a \pm b)^2 \neq a^2 + b^2$	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (Bin Formeln!)	$(a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$
	$a^2 - b^2 = (a + b)\cdot(a - b)$ (Bin Formel!)	
$(a \pm b)^n \neq a^n + b^n$	$(a \pm b)^n$ **Pascal Dreieck**, Bin. Satz!	$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$ (Potenzsatz!)
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	$\sqrt{a^2 + b^2}$ **keine** Vereinfachung möglich!	$\sqrt{a^2\cdot b^2} = \lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$ ist OK.
$\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$	$\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5}\cdot\lvert a\rvert$	
$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a \pm b}$ **keine** Vereinfachung möglich!	$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\lvert a \pm b\rvert \neq \lvert a\rvert \pm \lvert b\rvert$	$\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ (Dreiecksungleichung)	$\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$, ist OK.
$\ln(a \pm b) \neq \ln(a) \pm \ln(b)$	$\ln(a \pm b)$ **keine** Vereinfachung!	$\ln(a\cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
		$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
$a^{x\pm y} \neq a^x \pm a^y$	$a^{x+y} = a^x\cdot a^y$ (Potenzgesetz!)	$a^{x\cdot y} = (a^x)^y$; $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^x}$
$\sin(a \pm b) \neq \sin(a) \pm \sin(b)$	$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cdot\cos(b) \pm \cos(a)\cdot\sin(b)$	$\sin(a\cdot b)$ **keine** Vereinfachung!

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

21 Die 10 Sünden der Mathematik

Sünde:	**Korrekter Weg, falls vorhanden:**	**Aber:**
$-3^2 \neq +9$	Klammer-Sünde: $-3^2 = (-1) \cdot 3 \cdot 3 = -9$	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \neq \frac{a \pm c}{b \pm d}$	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ (Bruchrechnen!)
$(a \pm b)^2 \neq a^2 + b^2$	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (Bin Formeln!) $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ (Bin Formel!)	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$
$(a \pm b)^n \neq a^n + b^n$	$(a \pm b)^n$ **Pascal Dreieck**, Bin. Satz!	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (Potenzsatz!)
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$	$\sqrt{a^2 + b^2}$ **keine** Vereinfachung möglich! $\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5} \cdot \lvert a \rvert$	$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$ ist OK.
$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a \pm b}$ **keine** Vereinfachung möglich!	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\lvert a \pm b \rvert \neq \lvert a \rvert \pm \lvert b \rvert$	$\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ (Dreiecksungleichung)	$\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$, ist OK.
$\ln(a \pm b) \neq \ln(a) \pm \ln(b)$	$\ln(a \pm b)$ **keine** Vereinfachung!	$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
$a^{x \pm y} \neq a^x \pm a^y$	$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (Potenzgesetz!)	$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$; $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$
$\sin(a \pm b) \neq \sin(a) \pm \sin(b)$	$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$	$\sin(a \cdot b)$ **keine** Vereinfachung!

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

21 Die 10 Sünden der Mathematik

Sünde:	**Korrekter Weg, falls vorhanden:**	**Aber:**
$-3^2 \neq +9$	Klammer-Sünde: $-3^2 = (-1) \cdot 3 \cdot 3 = -9$	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \neq \frac{a \pm c}{b \pm d}$	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ (Bruchrechnen!)
$(a \pm b)^2 \neq a^2 + b^2$	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (Bin Formeln!) $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ (Bin Formel!)	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$
$(a \pm b)^n \neq a^n + b^n$	$(a \pm b)^n$ **Pascal Dreieck**, Bin. Satz!	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (Potenzsatz!)
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$	$\sqrt{a^2 + b^2}$ **keine** Vereinfachung möglich! $\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5} \cdot \lvert a \rvert$	$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$ ist OK.
$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a \pm b}$ **keine** Vereinfachung möglich!	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\lvert a \pm b \rvert \neq \lvert a \rvert \pm \lvert b \rvert$	$\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ (Dreiecksungleichung)	$\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$, ist OK.
$\ln(a \pm b) \neq \ln(a) \pm \ln(b)$	$\ln(a \pm b)$ **keine** Vereinfachung!	$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
$a^{x \pm y} \neq a^x \pm a^y$	$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (Potenzgesetz!)	$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$; $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$
$\sin(a \pm b) \neq \sin(a) \pm \sin(b)$	$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$	$\sin(a \cdot b)$ **keine** Vereinfachung!

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &\neq a^2 \pm b^2 \\
(a \pm b)^n &\neq a^n \pm b^n \\
\sqrt{a^2 + b^2} &\neq a + b \\
\sqrt{3^2 + 4^2} &\neq 3 + 4 \\
\sqrt{a \pm b} &\neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\
|a \pm b| &\neq |a| + |b| \\
\ln(a \pm b) &\neq \ln(a) + \ln(b)
\end{aligned}
$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Eine genauere Betrachtung der obigen Beispiele zeigt, dass es in fast allen Fällen um das Zusammenspiel einer 2-stelligen mit einer 1-stelligen Rechenoperation geht.

2-stellige Rechenoperationen

2-stellige Rechenoperationen

$x, y \mapsto x + y$: Addition zweier Zahlen x und y,

2-stellige Rechenoperationen

$x, y \mapsto x + y$: Addition zweier Zahlen x und y,

$x, y \mapsto x - y$: Subtraktion zweier Zahlen x und y,

2-stellige Rechenoperationen

$x, y \mapsto x + y$: Addition zweier Zahlen x und y,

$x, y \mapsto x - y$: Subtraktion zweier Zahlen x und y,

$x, y \mapsto x \cdot y$: Multiplikation zweier Zahlen x und y,

2-stellige Rechenoperationen

$x, y \mapsto x + y$: Addition zweier Zahlen x und y,

$x, y \mapsto x - y$: Subtraktion zweier Zahlen x und y,

$x, y \mapsto x \cdot y$: Multiplikation zweier Zahlen x und y,

$x, y \mapsto \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$: Division zweier Zahlen x und y.

1-stellige Rechenoperationen

1-stellige Rechenoperationen

$x \mapsto -x$: die Gegenzahl eine Zahl x nehmen,

1-stellige Rechenoperationen

$x \mapsto -x$: die Gegenzahl eine Zahl x nehmen,

$x \mapsto \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$: den Kehrwert einer Zahl x nehmen,

1-stellige Rechenoperationen

$x \mapsto -x$: die Gegenzahl eine Zahl x nehmen,

$x \mapsto \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$: den Kehrwert einer Zahl x nehmen,

$x \mapsto z + x$: einer Zahl x um z vermehren,

1-stellige Rechenoperationen

$x \mapsto -x$: die Gegenzahl eine Zahl x nehmen,

$x \mapsto \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$: den Kehrwert einer Zahl x nehmen,

$x \mapsto z + x$: einer Zahl x um z vermehren,

$x \mapsto z \cdot x$: einer Zahl x mit z vervielfachen,

1-stellige Rechenoperationen

$x \mapsto -x$: die Gegenzahl eine Zahl x nehmen,

$x \mapsto \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$: den Kehrwert einer Zahl x nehmen,

$x \mapsto z + x$: einer Zahl x um z vermehren,

$x \mapsto z \cdot x$: einer Zahl x mit z vervielfachen,

$x \mapsto x^2$: das Quadrat einer Zahl x nehmen,

1-stellige Rechenoperationen

$x \mapsto x^n$: die n-te Potenz einer Zahl x nehmen,

1-stellige Rechenoperationen

$x \mapsto x^n$: die n-te Potenz einer Zahl x nehmen,

$x \mapsto \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)$: die Wurzel einer Zahl x nehmen,

1-stellige Rechenoperationen

$x \mapsto x^n$: die n-te Potenz einer Zahl x nehmen,

$x \mapsto \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$: die Wurzel einer Zahl x nehmen,

$x \mapsto |x|$: den Betrag einer Zahl x nehmen,

1-stellige Rechenoperationen

$x \mapsto x^n$: die n-te Potenz einer Zahl x nehmen,

$x \mapsto \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$: die Wurzel einer Zahl x nehmen,

$x \mapsto |x|$: den Betrag einer Zahl x nehmen,

$x \mapsto \log x \quad (x > 0)$: den Logarithmus einer Zahl x nehmen.

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Entscheidende Frage:

Wie “vertragen” sich 2-stellige und 1-stellige Rechenoperationen?

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 1:

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Betrag nehmen' (1-stellig)

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 1:

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Betrag nehmen' (1-stellig)

$$x, y \quad \mapsto \quad x \cdot y \quad \mapsto \quad |x \cdot y|$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 1:

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Betrag nehmen' (1-stellig)

$$\begin{array}{lllll} x, y & \mapsto & x \cdot y & \mapsto & |x \cdot y| \\ x, y & \mapsto & |x|, |y| & \mapsto & |x| \cdot |y| \end{array}$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 1:

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Betrag nehmen' (1-stellig)

$$\begin{array}{lllll} x, y & \mapsto & x \cdot y & \mapsto & |x \cdot y| \\ x, y & \mapsto & |x|, |y| & \mapsto & |x| \cdot |y| \end{array}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 1:

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Betrag nehmen' (1-stellig)

$$\begin{array}{lllll} x, y & \mapsto & x \cdot y & \mapsto & |x \cdot y| \\ x, y & \mapsto & |x|, |y| & \mapsto & |x| \cdot |y| \end{array}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

'Multiplikation' und 'Betrag nehmen' sind vertauschbar!

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 2:

‘Addition’ (2-stellig) und ‘Kehrwert nehmen’ (1-stellig)

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 2:

'Addition' (2-stellig) und 'Kehrwert nehmen' (1-stellig)

$$x, y \quad \mapsto \quad x + y \quad \mapsto \quad \frac{1}{x+y}$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 2:

'Addition' (2-stellig) und 'Kehrwert nehmen' (1-stellig)

$$x, y \quad \mapsto \quad x + y \quad \mapsto \quad \frac{1}{x+y}$$

$$x, y \quad \mapsto \quad \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \quad \mapsto \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 2:

'Addition' (2-stellig) und 'Kehrwert nehmen' (1-stellig)

$$x, y \quad \mapsto \quad x + y \quad \mapsto \quad \frac{1}{x+y}$$

$$x, y \quad \mapsto \quad \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \quad \mapsto \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

Beispiel 2:

'Addition' (2-stellig) und 'Kehrwert nehmen' (1-stellig)

$$x, y \quad \mapsto \quad x + y \quad \mapsto \quad \frac{1}{x+y}$$

$$x, y \quad \mapsto \quad \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \quad \mapsto \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

'Addition' und 'Kehrwert nehmen' sind **nicht** vertauschbar!

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

	Addition	Multiplikation
Gegenzahl nehmen	$-(x+y) = (-x) + (-y)$	$-(x \cdot y) \neq (-x) \cdot (-y)$
Kehrwert nehmen	$\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$
Vermehren um z	$z + (x+y) \neq (z+x) + (z+y)$	$z + (x \cdot y) \neq (z+x) \cdot (z+y)$
Vervielfachen mit z	$z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$	$z \cdot (x \cdot y) \neq (z \cdot x) \cdot (z \cdot y)$
Quadrieren	$(x+y^2) \neq x^2 + y^2$	$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

	Addition	Multiplikation
Gegenzahl nehmen	$-(x+y) = (-x) + (-y)$	$-(x \cdot y) \neq (-x) \cdot (-y)$
Kehrwert nehmen	$\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$
Vermehren um z	$z + (x+y) \neq (z+x) + (z+y)$	$z + (x \cdot y) \neq (z+x) \cdot (z+y)$
Vervielfachen mit z	$z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$	$z \cdot (x \cdot y) \neq (z \cdot x) \cdot (z \cdot y)$
Quadrieren	$(x+y^2) \neq x^2 + y^2$	$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

	Addition	Multiplikation
die n-te Potenz nehmen	$(x+y)^n \neq x^n + y^n$	$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
Wurzelziehen	$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$
Betrag nehmen	$\lvert x+y \rvert \neq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$	$\lvert x \cdot y \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$
Logarithmus nehmen	$\log(x+y) \neq \log(x) + \log(y)$	$\log(x \cdot y) \neq \log(x) \cdot \log(y)$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

	Addition	Multiplikation
die n-te Potenz nehmen	$(x+y)^n \neq x^n + y^n$	$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
Wurzelziehen	$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$
Betrag nehmen	$\lvert x+y \rvert \neq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$	$\lvert x \cdot y \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$
Logarithmus nehmen	$\log(x+y) \neq \log(x) + \log(y)$	$\log(x \cdot y) \neq \log(x) \cdot \log(y)$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

'Multiplikation' und 'Gegenzahl nehmen'

$$-3^2 \neq +9$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

'Multiplikation' und 'Gegenzahl nehmen'

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Gegenzahl nehmen' (1-stellig)

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

'Multiplikation' und 'Gegenzahl nehmen'

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Gegenzahl nehmen' (1-stellig)

$$x, y \quad \mapsto \quad x \cdot y \quad \mapsto \quad -(x \cdot y)$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

'Multiplikation' und 'Gegenzahl nehmen'

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Gegenzahl nehmen' (1-stellig)

$$x, y \quad \mapsto \quad x \cdot y \quad \mapsto \quad -(x \cdot y)$$

$$x, y \quad \mapsto \quad -x, -y \quad \mapsto \quad (-x) \cdot (-y)$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

'Multiplikation' und 'Gegenzahl nehmen'

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Gegenzahl nehmen' (1-stellig)

$$x, y \quad \mapsto \quad x \cdot y \quad \mapsto \quad -(x \cdot y)$$

$$x, y \quad \mapsto \quad -x, -y \quad \mapsto \quad (-x) \cdot (-y)$$

$$-3^2 = -(3 \cdot 3) \neq (-3) \cdot (-3) = 9$$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

'Multiplikation' und 'Gegenzahl nehmen'

'Multiplikation' (2-stellig) und 'Gegenzahl nehmen' (1-stellig)

$$x, y \quad \mapsto \quad x \cdot y \quad \mapsto \quad -(x \cdot y)$$

$$x, y \quad \mapsto \quad -x, -y \quad \mapsto \quad (-x) \cdot (-y)$$

$$-3^2 = -(3 \cdot 3) \neq (-3) \cdot (-3) = 9$$

'Multiplikation' und 'Gegenzahl nehmen' sind **nicht** vertauschbar!

Sünden der Mathematik

Auszüge aus Interviews mit Schülerinnen und Schülern, die ‘Sünden’ begangen haben:

Sünden der Mathematik

Auszüge aus Interviews mit Schülerinnen und Schülern, die 'Sünden' begangen haben:

"Ich habe mir nichts überlegt!"

Sünden der Mathematik

Auszüge aus Interviews mit Schülerinnen und Schülern, die 'Sünden' begangen haben:

"Ich habe mir nichts überlegt!"

"Ich habe gemeint, dass das gilt!"

Sünden der Mathematik

Auszüge aus Interviews mit Schülerinnen und Schülern, die 'Sünden' begangen haben:

"Ich habe mir nichts überlegt!"

"Ich habe gemeint, dass das gilt!"

"Ich habe nicht gedacht, dass das nicht gilt!"

Sünden der Mathematik

Auszüge aus Interviews mit Schülerinnen und Schülern, die 'Sünden' begangen haben:

"Ich habe mir nichts überlegt!"

"Ich habe gemeint, dass das gilt!"

"Ich habe nicht gedacht, dass das nicht gilt!"

"Ich habe nicht gewusst, dass das nicht gilt!"

Sünden der Mathematik

Auszüge aus Interviews mit Schülerinnen und Schülern, die 'Sünden' begangen haben:

"Ich habe mir nichts überlegt!"

"Ich habe gemeint, dass das gilt!"

"Ich habe nicht gedacht, dass das nicht gilt!"

"Ich habe nicht gewusst, dass das nicht gilt!"

"Ich habe eigentlich noch befürchtet,
dass das eventuell nicht stimmen könnte!"

Wichtige Fragen:

Wichtige Fragen:

Wenden die Schülerinnen und Schüler “Regeln” an?

Wichtige Fragen:

Wenden die Schülerinnen und Schüler “Regeln” an?

Geschieht das Anwenden von Regeln bewusst oder unbewusst?

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert,

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert.

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert. (Aber frieren → gefroren)

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert. (Aber frieren → gefroren)

"Die Kinder erzählen, dass sie gestern gelaufen und heute durch den Wald spaziert (nicht 'gespaziert') sind, was sie gestern verloren (nicht 'geverloren') und dann wieder gefunden haben."

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert. (Aber frieren → gefroren)

"Die Kinder erzählen, dass sie gestern gelaufen und heute durch den Wald spaziert (nicht 'gespaziert') sind, was sie gestern verloren (nicht 'geverloren') und dann wieder gefunden haben."

Ist das auswendig gelernt?

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert. (Aber frieren → gefroren)

"Die Kinder erzählen, dass sie gestern gelaufen und heute durch den Wald spaziert (nicht 'gespaziert') sind, was sie gestern verloren (nicht 'geverloren') und dann wieder gefunden haben."

Ist das auswendig gelernt? Haben die Kinder eine 'Tabelle' mit allen Verben gespeichert?

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert. (Aber frieren → gefroren)

"Die Kinder erzählen, dass sie gestern gelaufen und heute durch den Wald spaziert (nicht 'gespaziert') sind, was sie gestern verloren (nicht 'geverloren') und dann wieder gefunden haben."

Ist das auswendig gelernt? Haben die Kinder eine 'Tabelle' mit allen Verben gespeichert? Nein?

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert. (Aber frieren → gefroren)

"Die Kinder erzählen, dass sie gestern gelaufen und heute durch den Wald spaziert (nicht 'gespaziert') sind, was sie gestern verloren (nicht 'geverloren') und dann wieder gefunden haben."

Ist das auswendig gelernt? Haben die Kinder eine 'Tabelle' mit allen Verben gespeichert? Nein?

Die Zwerge quangen

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert. (Aber frieren → gefroren)

"Die Kinder erzählen, dass sie gestern gelaufen und heute durch den Wald spaziert (nicht 'gespaziert') sind, was sie gestern verloren (nicht 'geverloren') und dann wieder gefunden haben."

Ist das auswendig gelernt? Haben die Kinder eine 'Tabelle' mit allen Verben gespeichert? Nein?

Die Zwerge quangen → Die Zwerge haben gequangt.

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert. (Aber frieren → gefroren)

"Die Kinder erzählen, dass sie gestern gelaufen und heute durch den Wald spaziert (nicht 'gespaziert') sind, was sie gestern verloren (nicht 'geverloren') und dann wieder gefunden haben."

Ist das auswendig gelernt? Haben die Kinder eine 'Tabelle' mit allen Verben gespeichert? Nein?

Die Zwerge quangen → Die Zwerge haben gequangt.

Die Zwerge patieren

Manfred Spitzer (Psychiater, Hochschullehrer und Buchautor)

Können Kinder grammatikalische Regeln (richtig) anwenden?

Regel: Das Partizip Perfekt von Verben auf '-ieren' wird ohne die Vorsilbe 'ge-' gebildet.

studieren → studiert, reparieren → repariert. (Aber frieren → gefroren)

"Die Kinder erzählen, dass sie gestern gelaufen und heute durch den Wald spaziert (nicht 'gespaziert') sind, was sie gestern verloren (nicht 'geverloren') und dann wieder gefunden haben."

Ist das auswendig gelernt? Haben die Kinder eine 'Tabelle' mit allen Verben gespeichert? Nein?

Die Zwerge quangen → Die Zwerge haben gequangt.

Die Zwerge patieren → Die Zwerge haben/sind patiert.

Negatives Wissen

Vermutung: Der Grund für die 'Sünden der Mathematik' (d.h. die falschen 'Regeln' der Schülerinnen und Schüler) ist das fehlende negative Wissen!!

Negatives Wissen

Vermutung: Der Grund für die 'Sünden der Mathematik' (d.h. die falschen 'Regeln' der Schülerinnen und Schüler) ist das fehlende negative Wissen!!

Die Schülerinnen und Schüler halten die Vertauschbarkeit von 2- und 1-stelligen Rechenoperationen für den 'Normalfall', obwohl es die Ausnahme ist!!

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

	Addition	Multiplikation
Gegenzahl nehmen	$-(x+y) = (-x) + (-y)$	$-(x \cdot y) \neq (-x) \cdot (-y)$
Kehrwert nehmen	$\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$
Vermehren um z	$z + (x+y) \neq (z+x) + (z+y)$	$z + (x \cdot y) \neq (z+x) \cdot (z+y)$
Vervielfachen mit z	$z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$	$z \cdot (x \cdot y) \neq (z \cdot x) \cdot (z \cdot y)$
Quadrieren	$(x+y^2) \neq x^2 + y^2$	$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$

2-stellige und 1-stellige Rechenopertionen

	Addition	Multiplikation
die n-te Potenz nehmen	$(x+y)^n \neq x^n + y^n$	$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
Wurzelziehen	$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$
Betrag nehmen	$\lvert x+y \rvert \neq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$	$\lvert x \cdot y \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$
Logarithmus nehmen	$\log(x+y) \neq \log(x) + \log(y)$	$\log(x \cdot y) \neq \log(x) \cdot \log(y)$

Negatives Wissen

1-stellige und 2-stellige Rechenoperationen sind
(in der Regel)
nicht vertauschbar!!!

Negatives Wissen

Folgerung:
Anstatt: "Es gilt das Distributivgesetz und jetzt lösen wir 100 Übungsaufgaben dazu!" wäre es gewinnbringender, das negative Wissen zu thematisieren und aufzubauen.

Negatives Wissen

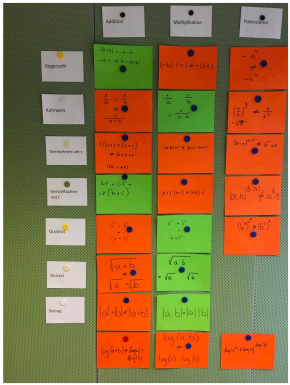
Aufbau von negativem Wissen: Tipp 1

Schülerinnen und Schüler können Tabellen wie oben selber erstellen!

Negatives Wissen

Aufbau von negativem Wissen: Tipp 1

	Addition	Multiplikation
Gegenzahl nehmen	$-(x+y) = (-x) + (-y)$	$-(x \cdot y) \neq (-x) \cdot (-y)$
Kehrwert nehmen	$\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{x \cdot y} \neq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$
Vermehren um z	$z + (x+y) \neq (z+x) + (z+y)$	$z + (x \cdot y) \neq (z+x) \cdot (z+y)$
Vervielfachen mit z	$z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$	$z \cdot (x \cdot y) \neq (z \cdot x) \cdot (z \cdot y)$
Quadrieren	$(x+y^2) \neq x^2 + y^2$	$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$
die n-te Potenz nehmen	$(x+y)^n \neq x^n + y^n$	$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
Wurzelziehen	$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$
Betrag nehmen	$\lvert x+y \rvert \neq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$	$\lvert x \cdot y \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$
Logarithmus nehmen	$\log(x+y) \neq \log(x) + \log(y)$	$\log(x \cdot y) \neq \log(x) \cdot \log(y)$



Negatives Wissen

Aufbau von negativem Wissen: Tipp 2

Gibt es Zahlen x und y, für welche $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ gilt?

Negatives Wissen

Aufbau von negativem Wissen: Tipp 2

Gibt es Zahlen x und y, für welche $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ gilt?

Für welche Zahlen a und b gilt $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?

Negatives Wissen

Aufbau von negativem Wissen: Tipp 2

Gibt es Zahlen x und y, für welche $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ gilt?

Für welche Zahlen a und b gilt $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?

Gilt $|a+b| \leq |a| + |b|$ oder $|a+b| \geq |a| + |b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$?

‘Regeln’ von Schülerinnen und Schülern

21 Die 10 Sünden der Mathematik

Sünde:	**Korrekter Weg, falls vorhanden:**	**Aber:**
$-3^2 \neq +9$	Klammer-Sünde: $-3^2 = (-1) \cdot 3 \cdot 3 = -9$	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \neq \frac{a \pm c}{b \pm d}$	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ (Bruchrechnen!)
$(a \pm b)^2 \neq a^2 + b^2$	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (Bin Formeln!) $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ (Bin Formel!)	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$
$(a \pm b)^n \neq a^n + b^n$	$(a \pm b)^n$ **Pascal Dreieck**, Bin. Satz!	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (Potenzsatz!)
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$	$\sqrt{a^2 + b^2}$ **keine** Vereinfachung möglich! $\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5} \cdot \lvert a \rvert$	$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$ ist OK.
$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a \pm b}$ **keine** Vereinfachung möglich!	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\lvert a \pm b \rvert \neq \lvert a \rvert \pm \lvert b \rvert$	$\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ (Dreiecksungleichung)	$\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$, ist OK.
$\ln(a \pm b) \neq \ln(a) \pm \ln(b)$	$\ln(a \pm b)$ **keine** Vereinfachung!	$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
$a^{x \pm y} \neq a^x \pm a^y$	$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (Potenzgesetz!)	$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$; $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$
$\sin(a \pm b) \neq \sin(a) \pm \sin(b)$	$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$	$\sin(a \cdot b)$ **keine** Vereinfachung!

Algebraische Regeln

$$a^{x+y} \neq a^x + a^y$$

Algebraische Regeln

$$a^{x+y} \neq a^x + a^y$$

$$a^{x \cdot y} \neq a^x \cdot a^y$$

Algebraische Regeln

$$a^{x+y} \neq a^x + a^y$$

$$a^{x \cdot y} \neq a^x \cdot a^y$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

Algebraische Regeln

$$a^{x+y} \neq a^x + a^y$$

$$a^{x \cdot y} \neq a^x \cdot a^y$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$\begin{array}{rccc} f: & \langle \mathbb{R}, + \rangle & \to & \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle \\ & x & \mapsto & a^x \quad (a > 0, a \neq 1) \end{array}$$

f ist ein Gruppenhomomorphismus

Algebraische Regeln

$$\log(x + y) \neq \log(x) + \log(y)$$

Algebraische Regeln

$$\log(x + y) \neq \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x \cdot y) \neq \log(x) \cdot \log(y)$$

Algebraische Regeln

$$\log(x + y) \neq \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x \cdot y) \neq \log(x) \cdot \log(y)$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Algebraische Regeln

$$\log(x + y) \neq \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x \cdot y) \neq \log(x) \cdot \log(y)$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\begin{array}{rccc} f: & \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle & \to & \langle \mathbb{R}, + \rangle \\ & x & \mapsto & \log_a(x) \quad (a > 0, a \neq 1) \end{array}$$

f ist ein Gruppenhomomorphismus

Homomorphismen

Noch allgemeiner heissen strukturverträgliche Abbildungen **Homomorphismen**.

Beispiel: In $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) ist die Konjugation ein Körperhomomorphismus:

$$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}; \quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Die Konjugation ist sowohl mit der Addition wie auch mit der Multiplikation verträglich d.h. vertauschbar!

Homomorphismen

Abbildungen eines Vektorraumes in sich selbst, die mit der Vektorraumstruktur 'verträglich' sind (d.h. es spielt keine Rolle, ob man zwei Vektoren zuerst addiert und dann abbildet oder zuerst abbildet und dann addiert, analog für die skalare Vervielfachung), heissen **lineare Abbildungen**. In der Linearen Algebra spielen diese Abbildungen eine herausragende Rolle.

Differentialrechnung

Das Addieren von Funktionswerten kann als Addieren der Funktionen selber aufgefasst werden.
Die Summe der Funktionen f und g ist definiert durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

In der Menge der differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist das Ableiten eine wichtige 1-stellige Operation. Es zeigt sich: Das Addieren von Funktionen ist mit dem Ableiten vertauschbar:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Das Multiplizieren von Funktionen ist mit dem Ableiten nicht vertauschbar:

$$[f(x) \cdot g(x)]' \neq f'(x) \cdot g'(x).$$

Terme & Formeln

Umgang mit Fehlern

Satz von Vieta

x_1 und x_2 sind genau dann Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

wenn $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Löse folgende quadratische Gleichungen:

a) $(x + 2)(x + 5) = 0$

b) $x^2 - 4x - 21 = 0$

c) $x^2 + 2x = 24$

d) $x^2 - 14x = -49$

e) $x^2 - 8x + 15 = 0$

f) $x^2 + 12x - 28 = 0$

g) $x^2 - 3x = 40$

h) $x^2 + 13x = -36$

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Löse folgende quadratische Gleichungen:

a) $(x+2)(x+5) = 0$

b) $x^2 - 4x - 21 = 0$

c) $x^2 + 2x = 24$

d) $x^2 - 14x = -49$

e) $x^2 - 8x + 15 = 0$

f) $x^2 + 12x - 28 = 0$

g) $x^2 - 3x = 40$

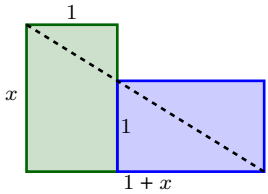
h) $x^2 + 13x = -36$

$$
\begin{aligned}
 & (x+2)(x+5) \\
x^2 - 4x - 21 &= (x-7)(x+3) \\
x^2 + 2x - 24 &= (x+6)(x-4) \\
x^2 - 14x + 49 &= (x-7)(x-7)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x^2 - 8x + 15 &= (x-3)(x-5) \\
x^2 + 12x - 28 &= (x+14)(x-2) \\
x^2 - 3x - 40 &= (x-8)(x+5) \\
x^2 + 13x - 36 &= (x+4)(x+9)
\end{aligned}
$$

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Kreditkartenformat

Welches Seitenverhältnis hat das Kreditkartenformat?



Lösung:

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = (x-?)(x-?)$$

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Schiefer Wurf

Eine Anwendung

Situation: Der Flug eines Golfballs kann mit einer quadratischen Funktion modelliert werden.

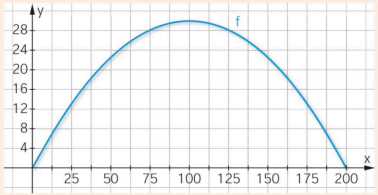
Funktion: Entfernung x vom Abschlag → Höhe h(x) über dem Boden

Funktionsgleichung: $h(x) = -0.003x^2 + 0.6x$ $\quad a = -0.003;\ b = 0.6;\ c = 0$

Wertetabelle:

x in m	h(x) in m
0	0
20	10.8
40	19.2
60	25.2
80	28.8
100	30.0
120	28.8

Graph:



Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Faktorisieren (in $\mathbb{Z}$) von $x^2 + px + q$ für ganzzahlige Werte von p und q zwischen -6 und 6.

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Faktorisieren (in $\mathbb{Z}$) von $x^2 + px + q$ für ganzzahlige Werte von p und q zwischen -6 und 6.

Workshop:

Lässt sich der quadratische Ausdruck für die angegebenen Werte p und q ganzzahlig faktorisieren?

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Faktorisieren (in $\mathbb{Z}$) von $x^2 + px + q$ für ganzzahlige Werte von p und q zwischen 0 und 6.

$p \backslash q$	0	1	2	3	4	5	6
0	x^2	x^2+1	x^2+2	x^2+3	x^2+4	x^2+5	x^2+6
1	$x(x+1)$	x^2+x+1	x^2+x+2	x^2+x+3	x^2+x+4	x^2+x+5	x^2+x+6
2	$x(x+2)$	$(x+1)^2$	x^2+2x+2	x^2+2x+3	x^2+2x+4	x^2+2x+5	x^2+2x+6
3	$x(x+3)$	x^2+3x+1	$(x+1)(x+2)$	x^2+3x+3	x^2+3x+4	x^2+3x+5	x^2+3x+6
4	$x(x+4)$	x^2+4x+1	x^2+4x+2	$(x+1)(x+3)$	$(x+2)^2$	x^2+4x+5	x^2+4x+6
5	$x(x+5)$	x^2+5x+1	x^2+5x+2	x^2+5x+3	$(x+1)(x+4)$	x^2+5x+5	$(x+2)(x+3)$
6	$x(x+6)$	x^2+6x+1	x^2+6x+2	x^2+6x+3	x^2+6x+4	$(x+1)(x+5)$	x^2+6x+6

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Faktorisieren (in $\mathbb{Z}$) von $x^2 + px + q$ für ganzzahlige Werte von p zwischen -6 und 0 und q zwischen 0 und 6.

$p \backslash q$	0	1	2	3	4	5	6
-6	$x(x-6)$	x^2-6x+1	x^2-6x+2	x^2-6x+3	x^2-6x+4	$(x-1)(x-5)$	x^2-6x+6
-5	$x(x-5)$	x^2-5x+1	x^2-5x+2	x^2-5x+3	$(x-1)(x-4)$	x^2-5x+5	$(x-2)(x-3)$
-4	$x(x-4)$	x^2-4x+1	x^2-4x+2	$(x-1)(x-3)$	$(x-2)^2$	x^2-4x+5	x^2-4x+6
-3	$x(x-3)$	x^2-3x+1	$(x-1)(x-2)$	x^2-3x+3	x^2-3x+4	x^2-3x+5	x^2-3x+6
-2	$x(x-2)$	$(x-1)^2$	x^2-2x+2	x^2-2x+3	x^2-2x+4	x^2-2x+5	x^2-x+6
-1	$x(x-1)$	x^2-x+1	x^2-x+2	x^2-x+3	x^2-x+4	x^2-x+5	x^2-x+6
0	x^2	x^2+1	x^2+2	x^2+3	x^2+4	x^2+5	x^2+6

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Faktorisieren (in $\mathbb{Z}$) von $x^2 + px + q$ für ganzzahlige Werte von p zwischen 0 und 6 und q zwischen -6 und 0.

$p\backslash q$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
0	x^2-6	x^2-5	$(x-2)(x+2)$	x^2-3	x^2-2	$(x-1)(x+1)$	x^2
1	$(x-2)(x+3)$	x^2+x-5	x^2+x-4	x^2+x-3	$(x-1)(x+2)$	x^2+x-1	$x(x+1)$
2	x^2+2x-6	x^2+2x-5	x^2+2x-4	$(x-1)(x+3)$	x^2+2x-2	x^2+2x-1	$x(x+2)$
3	x^2+3x-6	x^2+3x-5	$(x-1)(x+4)$	x^2+3x-3	x^2+3x-2	x^2+3x-1	$x(x+3)$
4	x^2+4x-6	$(x-1)(x+5)$	x^2+4x-4	x^2+4x-3	x^2+4x-2	x^2+4x-1	$x(x+4)$
5	$(x-1)(x+6)$	x^2+5x-5	x^2+5x-4	x^2+5x-3	x^2+5x-2	x^2+5x-1	$x(x+5)$
6	x^2+6x-6	x^2+6x-5	x^2+6x-4	x^2+6x-3	x^2+6x-2	x^2+6x-1	$x(x+6)$

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Faktorisieren (in $\mathbb{Z}$) von $x^2 + px + q$ für ganzzahlige Werte von p zwischen -6 und 0 und q zwischen -6 und 0.

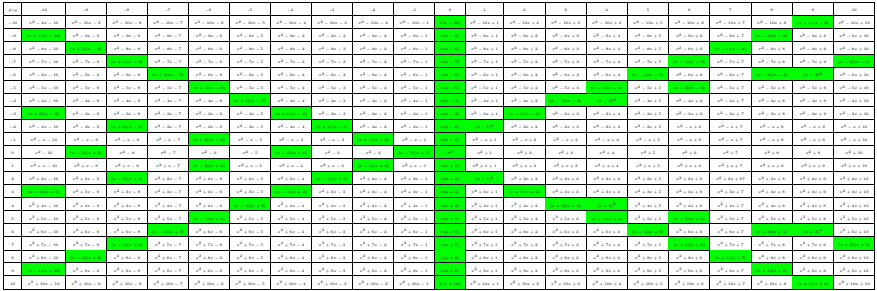
$p\backslash q$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
-6	x^2-6x-6	x^2-6x-5	x^2-6x-4	x^2-6x-3	x^2-6x-2	x^2-6x-1	$x(x-6)$
-5	$(x+1)(x-6)$	x^2-5x-5	x^2-5x-4	x^2-5x-3	x^2-5x-2	x^2-5x-1	$x(x-5)$
-4	x^2-4x-6	$(x+1)(x-5)$	x^2-4x-4	x^2-4x-3	x^2-4x-2	x^2-4x-1	$x(x-4)$
-3	x^2-3x-6	x^2-3x-5	$(x+1)(x-4)$	x^2-3x-3	x^2-3x-2	x^2-3x-1	$x(x-3)$
-2	x^2-2x-6	x^2-2x-5	x^2-2x-4	$(x+1)(x-3)$	x^2-2x-2	x^2-2x-1	$x(x-2)$
-1	$(x+2)(x-3)$	x^2-x-5	x^2-x-4	x^2-x-3	$(x+1)(x-2)$	x^2-x-1	$x(x-1)$
0	x^2-6	x^2-5	$(x-2)(x+2)$	x^2-3	x^2-2	$(x-1)(x+1)$	x^2

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Faktorisieren (in $\mathbb{Z}$) von $x^2 + px + q$ für ganzzahlige Werte von p und q zwischen -10 und 10.

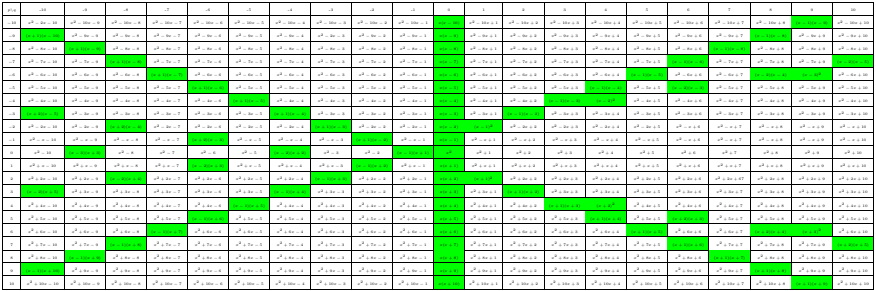
Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Faktorisieren (in $\mathbb{Z}$) von $x^2 + px + q$ für ganzzahlige Werte von p und q zwischen -10 und 10.



Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Faktorisieren (in $\mathbb{Z}$) von $x^2 + px + q$ für ganzzahlige Werte von p und q zwischen -10 und 10.



Nur rund 17% der Felder sind grün!

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Negatives Wissen

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Negatives Wissen

Faktorisieren der Art

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \quad \text{mit} \quad p, q, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Negatives Wissen

Faktorisieren der Art

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \quad \text{mit} \quad p, q, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

geht (fast) nie!!!

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken

Positives Wissen

Aber

$$x^2 + px + q$$

lässt sich in $\mathbb{Z}$ faktorisieren, falls

- $q = 0$
- $p = q + 1$
- $p = -q - 1$
- $p = 0$ und $-q$ ist eine Quadratzahl
- ...

Symmetrie $p \to -p$

Negatives Wissen

Aufbau von negativem Wissen:

Anstatt Dutzende von Übungen zu machen, bei denen die Faktorisierung klappt, lässt man die SuS die obige Tabelle in Teamwork erstellen und diskutiert darüber!

Negatives Wissen

Aufbau von negativem Wissen:

Anstatt Dutzende von Übungen zu machen, bei denen die Faktorisierung klappt, lässt man die SuS die obige Tabelle in Teamwork erstellen und diskutiert darüber!

Bringt mehr als das Lösen von Dutzenden von Übungsaufgaben!

Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft

Vielfach ist es für Schülerinnen und Schüler nicht einsichtig, warum Sachverhalte im Mathematikunterricht begründet resp. bewiesen werden müssen. Ihnen werden ja auch nur Dinge präsentiert, die stimmen. Bei den schliesslich in einem Mathematikbuch oder Lehrmittel veröffentlichten Beweisen sind zudem falsche Vermutungen, falsche Folgerungen oder Irrwege (die beim Finden der Beweise fast sicher vorgekommen sind) nicht mehr sichtbar; sie sind fein säuberlich 'ausradiert' worden.
Um den Sinn von mathematischen Begründungen einzusehen, ist es wichtig, auch hier negatives Wissen aufzubauen: Die SuS sollen mit Sachverhalten und dazugehörenden 'Beweisen' konfrontiert werden, die nur scheinbar stimmen.

Wurzel und Addition

"Satz"

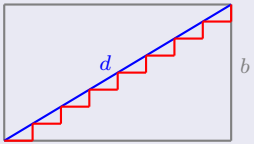
Für positive reelle Zahlen a und b gilt:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$$

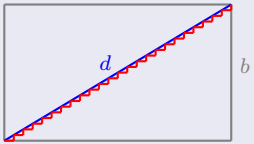
Wurzel und Addition

"Beweis"

Wegen $a, b > 0$ gibt es ein Rechteck mit Seitenlängen a und b.



L_8



L_{24}

Nach dem berühmten Satz des Pythagoras ist $a^2 + b^2 = d^2$ (d ist die Diagonale des Rechtecks) und daher $\sqrt{a^2 + b^2} = d$.

Wurzel und Addition

"Beweis"

Es ist offensichtlich, dass für $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\epsilon)$ existiert, dass für $n > N(\epsilon)$ der Streckenzug (rot) innerhalb einer ϵ-Umgebung der Diagonalen d liegt, d.h. jeder Punkt des Streckenzugs ist weniger als ϵ von der Diagonalen entfernt.

Also ist $d = \lim_{n\to\infty} |L_n|$ mit $|L_n| =$ Länge des Streckenzugs.

Andererseits gilt natürlich $|L_n| = n \cdot \frac{a}{n} + n \cdot \frac{b}{n} = a + b$.

Es folgt:
$\sqrt{a^2 + b^2} = d = \lim_{n\to\infty} |L_n| = a + b.$ □

Falsche Beweise

"Satz":

Es ist $1 = -1$.

Falsche Beweise

"Satz":

Es ist $1 = -1$.

Beweis:

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$$

Falsche Beweise

Behauptung: $5 = 4$.

Falsche Beweise

Behauptung: $5 = 4$.

Beweis:

$$-20 = -20$$

Falsche Beweise

Behauptung: $5 = 4$.

Beweis:

$$\begin{aligned} -20 &= -20 \\ 25 - 45 &= 16 - 36 \end{aligned}$$

Falsche Beweise

Behauptung: $5 = 4$.

Beweis:

$$\begin{aligned} -20 &= -20 \\ 25 - 45 &= 16 - 36 \\ 25 - 45 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 &= 16 - 36 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Falsche Beweise

Behauptung: $5 = 4$.

Beweis:

$$\begin{aligned} -20 &= -20 \\ 25 - 45 &= 16 - 36 \\ 25 - 45 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 &= 16 - 36 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Falsche Beweise

Behauptung: $5 = 4$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
-20 &= -20 \\
25 - 45 &= 16 - 36 \\
25 - 45 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 &= 16 - 36 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\
\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 \\
5 - \frac{9}{2} &= 4 - \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Falsche Beweise

Behauptung: $5 = 4$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
-20 &= -20 \\
25 - 45 &= 16 - 36 \\
25 - 45 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 &= 16 - 36 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\
\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 \\
5 - \frac{9}{2} &= 4 - \frac{9}{2} \\
5 &= 4
\end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen

Gleichungen lösen

$$\sqrt{x} + 1 = 2x$$

Äquivalenzumformungen

Gleichungen lösen

$$\sqrt{x} + 1 = 2x$$

Lösung:

$$\sqrt{x} = 2x - 1$$

Äquivalenzumformungen

Gleichungen lösen

$$\sqrt{x} + 1 = 2x$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 2x - 1 \\ x &= 4x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen

Gleichungen lösen

$$\sqrt{x} + 1 = 2x$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 2x - 1 \\ x &= 4x^2 - 4x + 1 \\ 0 &= 4x^2 - 5x + 1 \end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen

Gleichungen lösen

$$\sqrt{x} + 1 = 2x$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 2x - 1 \\ x &= 4x^2 - 4x + 1 \\ 0 &= 4x^2 - 5x + 1 \\ 0 &= 4(x-1)(x-\frac{1}{4}) \end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen

Gleichungen lösen

$$\sqrt{x} + 1 = 2x$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 2x - 1 \\ x &= 4x^2 - 4x + 1 \\ 0 &= 4x^2 - 5x + 1 \\ 0 &= 4(x-1)(x-\frac{1}{4}) \end{aligned}$$

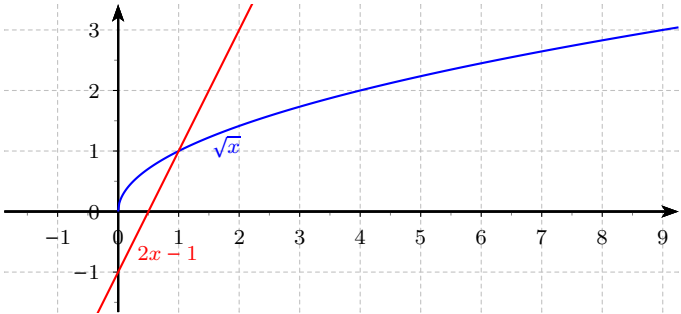
Also ist $x = 1$ oder $x = \frac{1}{4}$

Äquivalenzumformungen

Gleichungen lösen

$$\sqrt{x} + 1 = 2x \iff \sqrt{x} = 2x - 1$$

Aber:



Falsche Beweise

"Satz":

$\sqrt{2}$ ist rational, nämlich

$$\sqrt{2} = \frac{318\,281\,039}{225\,058\,681}$$

Falsche Beweise

"Satz":

$\sqrt{2}$ ist rational, nämlich

$$\sqrt{2} = \frac{318\,281\,039}{225\,058\,681}$$

$$2 \cdot 225\,058\,681^2 = 318\,281\,039^2$$

Falsche Beweise

"Satz":

$\sqrt{2}$ ist rational, nämlich

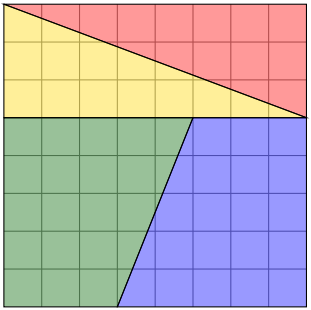
$$\sqrt{2} = \frac{318\,281\,039}{225\,058\,681}$$

$$2 \cdot 225\,058\,681^2 = 318\,281\,039^2$$

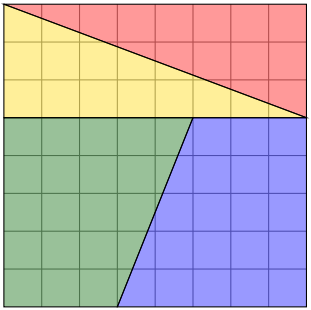
Wie findet man solche Näherungen? Berechne die Konvergenten des Kettenbruchs

$$[1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$$

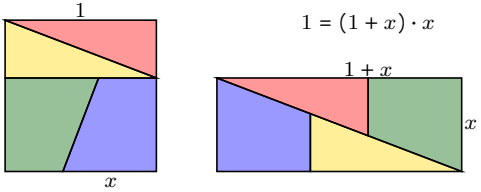
Schachbrett-Paradoxon (oder 64 = 65)



Schachbrett-Paradoxon (oder 64 = 65)



Schachbrett-Paradoxon

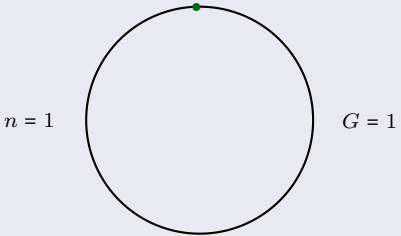


$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}}$$

Konvergenten: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \ldots$

n Punkte auf Kreis

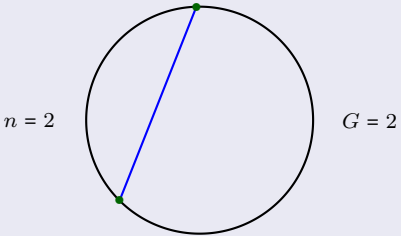
Wie viele Gebiete entstehen innerhalb der Kreisfläche?



siehe OEIS: A000127

n Punkte auf Kreis

Wie viele Gebiete entstehen innerhalb der Kreisfläche?

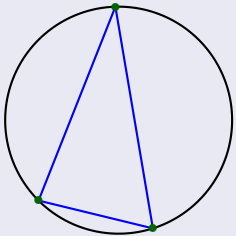


siehe OEIS: A000127

n Punkte auf Kreis

Wie viele Gebiete entstehen innerhalb der Kreisfläche?

$n = 3$



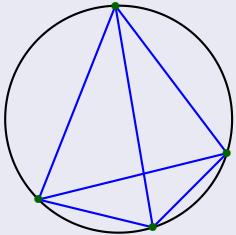
$G = 4$

siehe OEIS: A000127

n Punkte auf Kreis

Wie viele Gebiete entstehen innerhalb der Kreisfläche?

$n = 4$



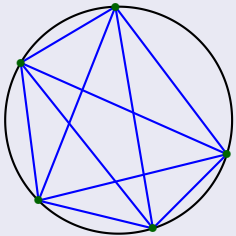
$G = 8$

siehe OEIS: A000127

n Punkte auf Kreis

Wie viele Gebiete entstehen innerhalb der Kreisfläche?

$n = 5$



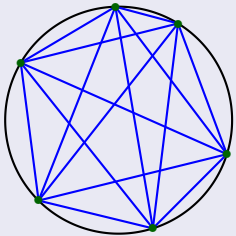
$G = 16$

siehe OEIS: A000127

n Punkte auf Kreis

Wie viele Gebiete entstehen innerhalb der Kreisfläche?

$n = 6$



$G = 31$

siehe OEIS: A000127

Elementargeometrie

aus einem Lehrmittel:

Eigenschaften der zentrischen Streckung

Gleichsinnige Abbildung	Die Orientierung bleibt erhalten.
Parallelentreue	Parallele Geraden bleiben parallel.
Winkeltreue	Das Bild eines Winkels ist stets ein Winkel gleicher Grösse.
Verhältnistreue	Das Verhältnis der Längen sich entsprechender Seiten bleibt erhalten. So ist der Quotient aus der Länge der Bildstrecke und der Länge der Originalstrecke konstant und gleich dem Streckungsfaktor k.

Elementargeometrie

aus einem Lehrmittel:

Eigenschaften der zentrischen Streckung

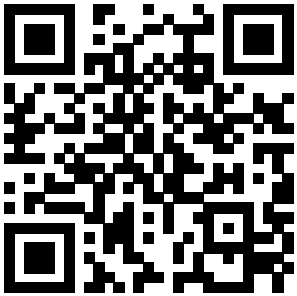
Gleichsinnige Abbildung	Die Orientierung bleibt erhalten.
Parallelentreue	Parallele Geraden bleiben parallel.
Winkeltreue	Das Bild eines Winkels ist stets ein Winkel gleicher Grösse.
Verhältnistreue	Das Verhältnis der Längen sich entsprechender Seiten bleibt erhalten. So ist der Quotient aus der Länge der Bildstrecke und der Länge der Originalstrecke konstant und gleich dem Streckungsfaktor k.

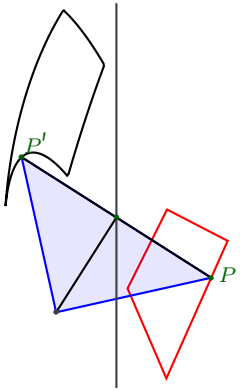
Die Geradentreue fehlt!

Elementargeometrie

- Alle Abbildungen, welche die Lernenden kennen, sind geradentreu → SuS haben keinen Beweisbedarf dafür, dass zentrische Streckung geradentreu ist.
- Beweisbedarf muss geweckt werden!

Abbildungen, die nicht geradentreu sind

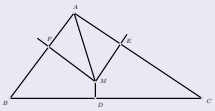




Falsche Beweise

Jedes Dreieck ist gleichschenklig

Es sei ABC irgend ein Dreieck. Dann konstruiere man die Winkelhalbierende des Winkels bei A und die Mittelsenkrechte der Seite a. Die Mitte von BC sei D (siehe Figur).



Die beiden Geraden werden sich schneiden, es sei denn, dass sie parallel wären. (Dann wäre aber das Dreieck ABC bereits gleichschenklig und wir könnten uns den restlichen Beweis sparen). Sei also der Schnittpunkt der Geraden M. Wir betrachten zunächst den Fall, dass M innerhalb des Dreiecks ABC liegt. Wir fällen von M auf AB und AC die Senkrechten MF und ME. Dann ist:

$$\Delta AFM \simeq \Delta AEM \quad (1)$$
$$\Delta MDB \simeq \Delta MDC \quad (2)$$

Aus (1) folgt $MF = ME$, aus (2) $MB = MC$, folglich auch

$$\Delta MBF \simeq \Delta MCE. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt

$$AF = AE \quad (4)$$
$$\text{und} \quad FB = EC \quad (5)$$

Addiert man die Gleichungen (4) und (5), so ergibt sich $AB = AC$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Kernthese des Vortrags

Ein (wichtiger) Grund für typische Fehler beim Rechnen und Umformen von Termen ist fehlendes Wissen über die Grenzen von algebraischen Regeln.
Dieses negative Wissen muss aufgebaut werden!

Kernthese des Vortrags

Ein (wichtiger) Grund für typische Fehler beim Rechnen und Umformen von Termen ist fehlendes Wissen über die Grenzen von algebraischen Regeln.
Dieses negative Wissen muss aufgebaut werden!

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!