Early Algebra
Algebraisches Denken im Übergang von der Primar- zur Sekundarstufe anregen

KIT

2025-02

Mathematik
macht ein Bildungsangebot …

- Kenntnisse … das weiß auch Google …
- Fertigkeiten … das kann ´ne App …
- Fähigkeiten

Jo Boaler „Jeder kann Mathe lernen“

13.08.2024 Frankfurter Allgemeine

In der heutigen Welt mit Künstlicher Intelligenz und der ganzen Computer-technologie brauchen wir keine Schüler [und Schülerinnen], die genau das können, was Computer können.
Sie müssen in der Lage sein, logisch zu denken und Probleme lösen zu können, einen Sinn aus dem zu generieren, was Computer ausspucken.

Mathematik…

[…] können uns diese beiden Tatsachen, die wir aus der mathematischen Erfahrung kennen, als Ausgangspunkt dienen:

> Erste Tatsache:
>
> Die Mathematik ist unser Geschöpf. Sie handelt von Ideen in unseren Köpfen.
>
> Zweite Tatsache:
>
> Die Mathematik ist eine objektive Realität in dem Sinne,
> daß [sic!] mathematische Objekte bestimmte Eigenschaften haben,
> die wir vielleicht entdecken können, vielleicht auch nicht.

(Davis & Hersh, 1994, S. 433)

Davis, P. & Hersh, R. (1994). *Erfahrung Mathematik*. Birkhäuser Verlag.

Struktur

- *Struktur* wird verstanden als mathematische Eigenschaften und Beziehungen (Relationen), die als Beschaffenheitsmerkmale abstrakter Gedankenobjekte (Mason, 1987) bzw. Noumena (Freudenthal, 1983) die Mathematik selbst definieren. (Schifter, 2018)
- Mathematische Strukturen beziehen sich auf Eigenschaften und Relationen, die für jegliche Fälle konstant bleiben.

> We take *mathematical structure* to mean the identification of general properties which are instantiated in particular situations as relationships between elements. […] When the relationship is seen as instantiation of a property, the relation becomes (part of) a structure. (Mason et al., 2009, S. 10)

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.

Mason, J. (1987). Erziehung kann nur auf die Bewusstheit Einfluss nehmen. *mathematik lehren*,(21), 4–5.

Mason, J., Stephens, M. & Watson, A. (2009). Appreciating Mathematical Structure for All. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10–32.

Schifter, D. (2018). Early Algebra as Analysis of Structure: A Focus on Operations. In C. Kieran (Hrsg.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (S. 309–327). Cham, CH: Springer International Publishing.

vgl. auch Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Struktur

Strukturen kommen streng genommen in der Realität gar nicht vor,
sondern sind theoretische Konstrukte, die in die Realität „hineingelesen" werden. [...]
Damit diese Strukturen für die mathematische Bearbeitung zugänglich werden,
bedarf es künstlicher Verkörperungen [...].

(Wittmann & Müller, 2007, S. 50)

Wittmann, E. & Müller, G. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen.

Das Unsichtbare an der Mathematik

But for all mathematics books tend to be awash with symbols,

mathematical notation no more is mathematics

than musical notation is music.

It is in the performance that the music comes alive

and becomes part of our experience; the music exists not on the printed page but in our minds.

The same is true for mathematics. ... And yet ... very obvious difference ...

It requires no musical training to experience and enjoy music when it is performed ...

human beings have developed no mathematical equivalent to a pair of ears.

(Devlin, 1997, S. 3-4)

Devlin, K. (1997). *Mathematics – The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*. New York: Scientific American Library.

Mathematisches Denken

- Mathematics is the classification and study of all possible patterns. [...]
  It is to be understood in a very wide sense, to cover almost any kind of regularity that can be recognized by the mind. (Sawyer, 1955, S. 12)
- Pattern is less a topic of mathematics than a defining quality of mathematics itself.
  Mathematics 'makes sense' because its patterns allow us to generalize our understanding from one situation to another.
  Children who expect mathematics to 'makes sense' look for patterns. (Brownell et al., 2014, S. 84)

Brownell, J., Chen, J., & Ginet, L. (2014). *Big ideas of early mathematics.* Pearson.

Sawyer, W. (1955). *Prelude to mathematics*. Penguin Books.

Bildungspläne Mathematik Baden-Württemberg

- Neben dieser Anwendungsorientierung ist es auch Aufgabe des Mathematikunterrichts in der Grundschule, den Kindern zu ermöglichen, auf ihrem Niveau mathematische Strukturen und Zusammenhänge zu entdecken, diese zu untersuchen und zu nutzen. (BW GS Mathe, 2024, S. 3)
- Der Bereich „Muster und Strukturen und funktionaler Zusammenhang" […] greift den Wesenskern der Mathematik, grundlegende Regel- und Gesetzmäßigkeiten inhaltlich zu erfassen, zu erklären und zu Problemlösungen zu nutzen auf.
  Das Erkennen von Mustern, Strukturen und funktionalen Zusammenhängen stellt eine übergeordnete Bedeutung dar und steht beim Erwerb der mathematischen Kompetenzen regelmäßig im Mittelpunkt der Auseinandersetzung mit den Inhalten.
  (BW GS Mathe, 2024, S. 7)
- das Aufdecken von Regelmäßigkeiten oder mathematischen Mustern für die Problemlösung nutzen (BW GY Mathe, 2024, S. 13)

Baden-Württemberg Ministerium für Kultur, Jugend und Sport (2024). *Bildungsplan der Grundschule: Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GS/M.V2
Baden-Württemberg Ministerium für Kultur, Jugend und Sport (2024). *Bildungsplan des Gymnasiums: Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M.V2

Muster

- any predictable regularity, usually involving numerical, spatial or logical relationships (Mulligan & Mitchelmore, 2009, S. 34).
- Muster sind erforschbare, grundsätzlich fortsetzbare Regelmäßigkeiten, die sich auf Phänomenebene sichtbar zeigen.
- In order for students to understand mathematics, it is important that they become aware of mathematical patterns as early as possible.
  The ability to see something general in something particular is essential for appreciating and understanding mathematics at any level. (Wittmann, 2021, S. 233)
- Unser ganzes kognitives System ist auf Muster ausgerichtet, denn das Gehirn wäre nicht in der Lage, jeden Einzelfall gesondert zu behandeln. Erkennen basiert immer auf Musterbildung. (Wittmann & Müller, 2007, S. 48)

Literaturangaben in: Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Muster und Strukturen

Muster

Sichtbare Phänomene,
Regelmäßigkeiten

Strukturen

Mathematische Beziehungen,
Eigenschaften, Relationen

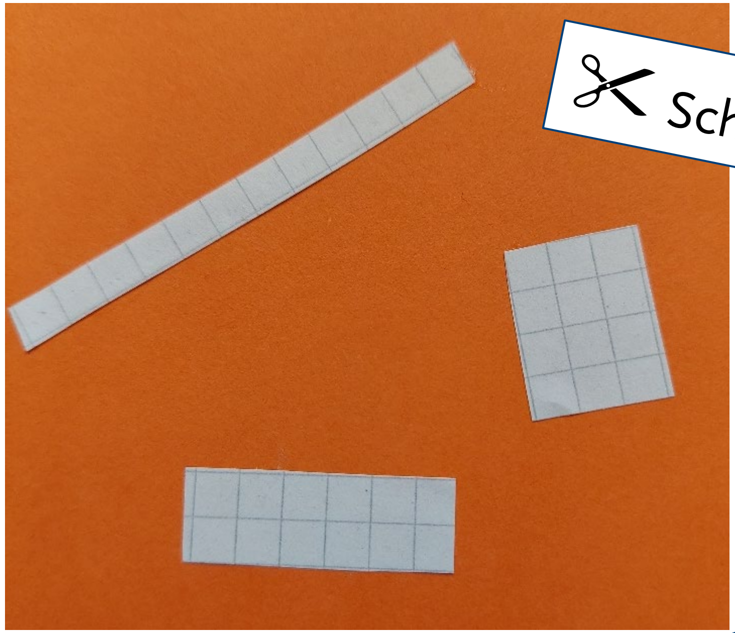
Steinweg, A. S. (2020). Muster und Strukturen: Anschlussfähige Mathematik von Anfang an. In H. Siller, W. Weigel & J. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 39–46). Münster: WTM-Verlag.

Mathematik sichtbar machen?
Zum Beispiel: Zahlen erforschen

- Nehmen Sie gedanklich 12 Steinchen (Plättchen, Würfelchen, ...) in die Hand und legen Sie geometrische Figuren.
- Wie viele verschiedene Rechtecke können Sie finden?
- Gelingt auch ein Dreieck?
- ... oder ein Quadrat als besonderes Rechteck?

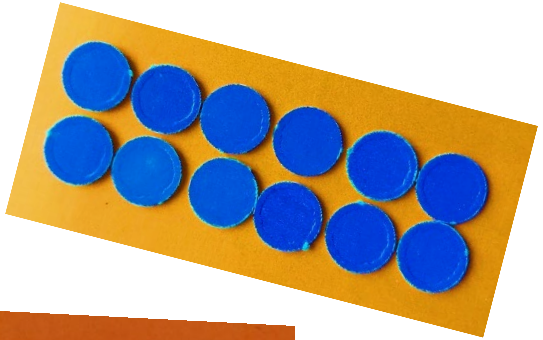
- Wie ist es mit 13 Steinchen?
- ... oder mit 11?

Mathematik sichtbar machen

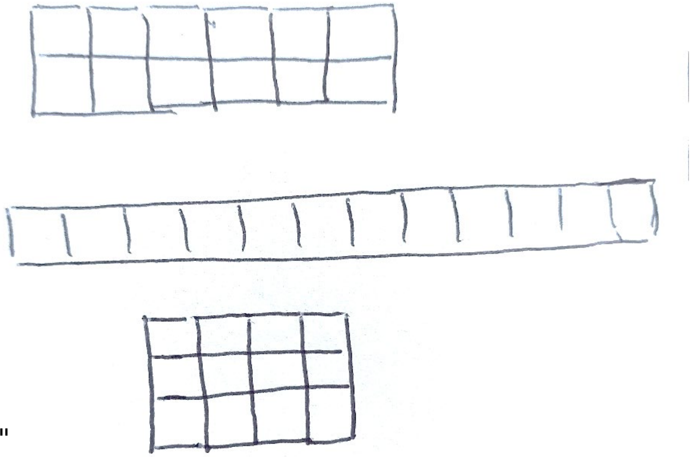


Schneiden

Legen



Zeichnen



vgl. auch Steinweg, A. S. (2024). "Bei 12 gehen ganz viele Rechtecke, bei 13 nicht." Zahlenmuster entdecken und multiplikative Zahlstrukturen verstehen. *Die Grundschulzeitschrift, 38*(345), 16–19.

Mathematische Hintergründe

Definition der Teilerrelation

für $a, b \in \mathbb{N}$

$a|b :\Leftrightarrow$ es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot k = b$

$1 \cdot 12 = 12$ $\quad$ $12 \cdot 1 = 12$

$2 \cdot 6 = 12$ $\quad$ $6 \cdot 2 = 12$

$3 \cdot 4 = 12$ $\quad$ $4 \cdot 3 = 12$

Kommutativität

$a, b \in \mathbb{N}$

$a \cdot b = b \cdot a$

Primzahlen

Primzahlen als besondere Zahlen p mit Teilermenge aus genau 2 Zahlen, d.h. $T_p = |2|$

Muster entdecken – Strukturen verstehen

Arithmetisches Denken	Algebraisches Denken
Zahlen, Operationen, Gleichungen, Funktionen …	Zahlen, Operationen, Gleichungen, Funktionen …
als Prozesse, die unmittelbar durchführbar sind,	als Beispiele (Repräsentanten), die Muster für Entdeckungen anbieten,
um numerische Antworten und Ergebniswerte von Berechnungen zu ermitteln.	um strukturelle Eigenschaften und Relationen als allgemeingültige Konzepte (neue Objekte des Denkens) zu verstehen.

to do mathematics

to think about mathematics

Algebra

- … als Formelsprache

„Terme und Gleichungen reduzieren einen [inner- oder außermathematischen] Kontext auf die wesentlichen Größen und Zusammenhänge zwischen diesen Größen.“ (S. 3)

- … als Werkzeug

„um geometrische, physikalische oder Anwendungsprobleme durch Formelsprache auszudrücken und so zu lösen.“(S. 7)

- … als Denkweise

„zeigt sich im Umgang mit Denkobjekten beim Übergang von konkreten zu unbestimmten Objekten und beim Operieren auf symbolischer Ebene.“ (S. 11)

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A. & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra*. Springer Spektrum.

Grundideen geben Orientierung

Die Lehrkräfte müssen mit den Lernenden
an den grundlegenden Ideen hinter den Themen arbeiten.
(...) explizite Aufmerksamkeit schenken
und sich Zeit nehmen für das, was ich Kernbewusstheit nennen würde,
oder für die Konzepte an Schnittstellen [neuralgische Lehr-Lern-Situationen].

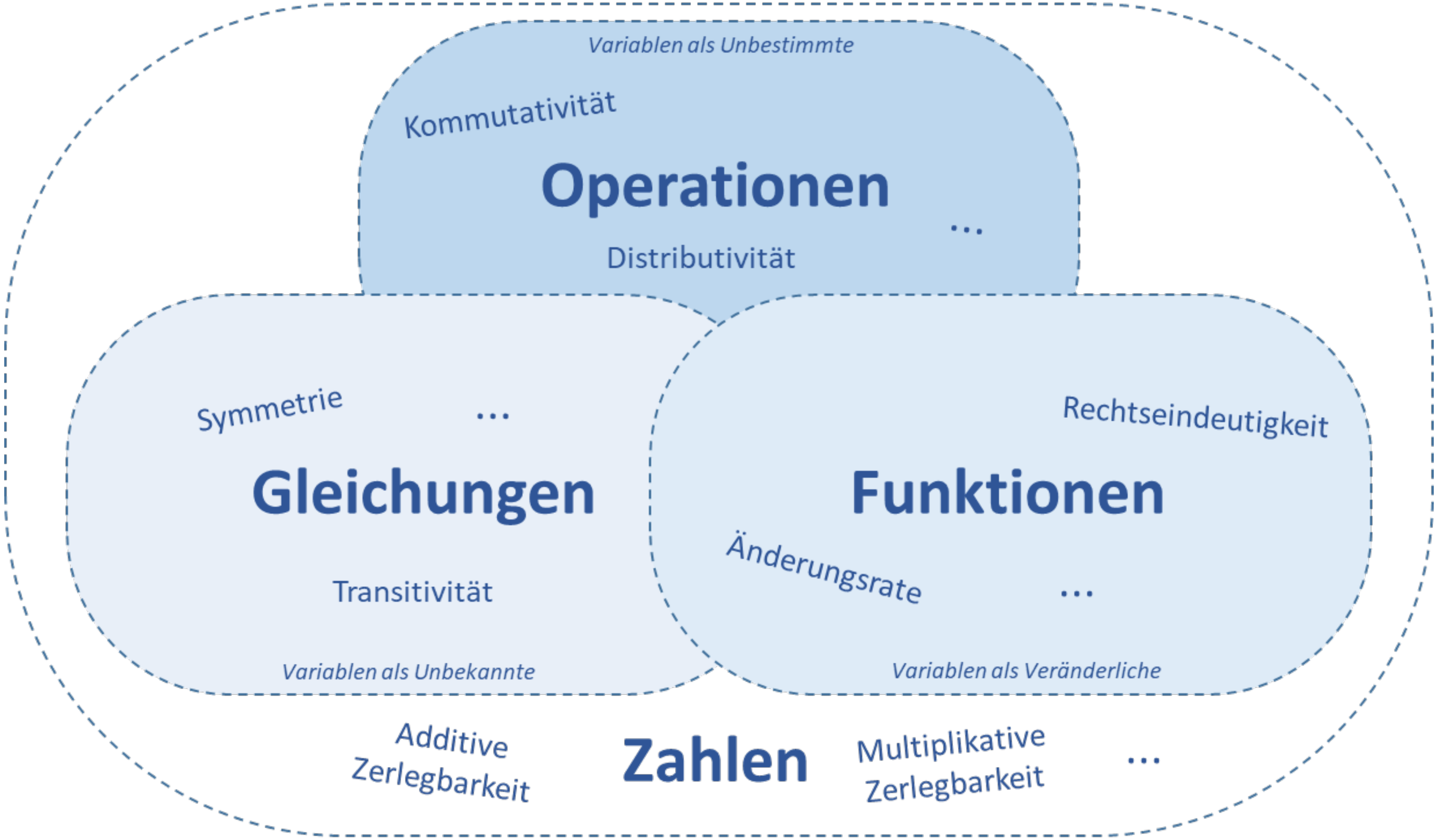
Mason, J. (2016) In conversation with John Mason. Laurinda Brown interviews John Mason. *Mathematics Teaching*, 254, 42–45.

Muster entdecken – Strukturen verstehen

Sichtbare Phänomene
Regelmäßigkeiten

Mathematische Eigenschaften
und Relationen

in...



Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.
Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 465–472). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

… Unterrichten

seeing the general in the particular

(Mason & Pimm, 1984)

- Attempts to arouse interest in the classroom on the basis of the beauty of the material that is being taught are likely to backfire.
  Students may be favorably impressed by the elegance of a teacher's presentation, but they can seldom be brought to become aware of the beauty of a result.
  Appreciation of mathematical beauty requires thorough familiarity with a mathematical theory, and such familiarity is arrived at the cost of time, effort, exercise and Sitzfleisch. (Rota, 1997, p. 177)

Arithmetisch einfache (diskrete), exemplarische (generische) Beispiele einsetzen, in denen die Lernenden Muster entdecken können, um eigenständig die zugrunde liegenden Strukturen (Eigenschaften, Relationen) zu verstehen.

Gian-Carlo Rota (1997). The Phenomenology of Mathematical Beauty. *Synthese: Proof and Progress in Mathematics, 111*(2), 171–182. https://www.jstor.org/stable/20117626?seq=8
Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 277– 289.

(Diskrete) Musterzugänge zu allgemeinen Strukturen

Recognise

erkennen, sehen, hineindeuten, bemerken …

Continue

fortführen, replizieren, analogisieren, transferieren …

ReCoDE

Describe

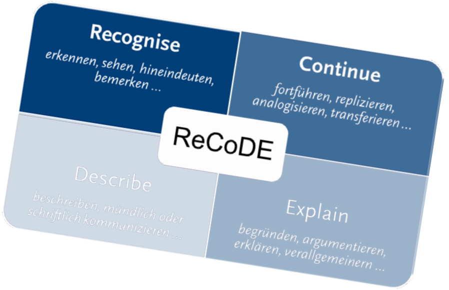
beschreiben, mündlich oder schriftlich kommunizieren …

Explain

begründen, argumentieren, erklären, verallgemeinern …

Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends - Eine Spurensuche. In dies. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 4: 10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51–66). University of Bamberg Press (UBP).
Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Re *erkennen, sehen, hineindeuten, bemerken*



We have no direct access
to what goes on in other people's heads.
(von Glasersfeld, 1991, S. xvi)

Generalizations are the life-blood of mathematics. (...)
Generalizing starts when you sense an underlying pattern, even if you cannot articulate it.
(Mason, Burton & Stacey, 2010, S. 8)

Glasersfeld, E. von (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Harlow: Pearson.

Mehrwert für prozessbezogene, allgemeine Kompetenzen

- Erläutern von Zusammenhängen zwischen mathematischen Objekten und zum Nachvollziehen und kritischen Hinterfragen von Erläuterungen und Erklärungen anderer(KMK, 2022, S. 10)
- Vermutungen und Begründungen zu mathematischen Zusammenhängen aufstellen / formulieren Begründungen und vollziehen Begründungen anderer nach (KMK, 2022, S. 10)
- entwickeln Lösungsideen zu Aufgaben, zu denen bislang keine Lösungsroutinen bekannt sind“(KMK, 2022, S. 11)
- Auswählen von sowie das verständige Umgehen mit bildlichen, symbolischen, materiellen, verbal-sprachlichen sowie grafisch-visuellen und tabellarischen Darstellungen, die mathematische Objekte und Sachverhalte repräsentieren. “(KMK, 2022, S. 11)

https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf

Prozessbezogene Kompetenzen

Mathematisch kommunizieren

- Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse darstellen (S. 16)

Mathematisch argumentieren und beweisen

- in mathematischen Zusammenhängen Vermutungen entwickeln und als mathematische Aussage formulieren
- eine Vermutung anhand von Beispielen auf ihre Plausibilität prüfen
- beim Erläutern und Begründen unterschiedliche Darstellungsformen verwenden (verbal, zeichnerisch, tabellarisch, formalisiert) (S. 12)

Mit mathematischen Darstellungen umgehen

- unterschiedliche mathematische Darstellungsformen verwenden und vernetzen (verbal, grafisch, tabellarisch, symbolisch)
- zwischen verschiedenen mathematischen Darstellungen wechseln
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungen erklären (S. 15)

Baden-Württemberg Ministerium für Kultur, Jugend und Sport (2024). *Bildungsplan des Gymnasiums: Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M.V2

Darstellungen

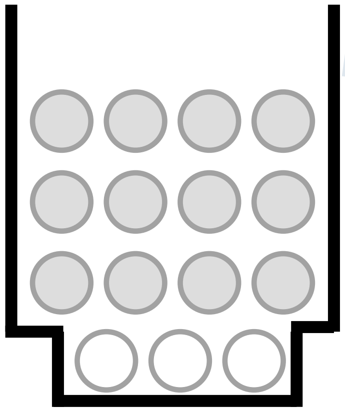
“…provide a connection to referential contexts that can aid student understanding of symbolic representations”
(Lannin, 2005, S. 233)

Spardose

3 Cent zu Beginn
und 4 kommen jedes Mal dazu.

Kontext
Text

Kontext
Darstellung

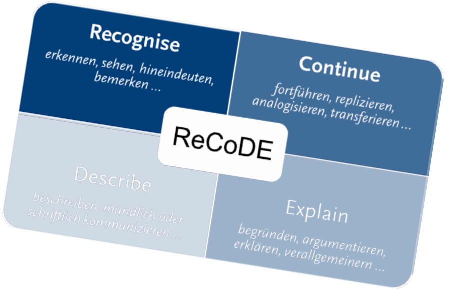


(Schifter, 2018)

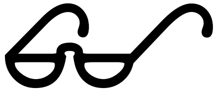
Kontext
Tabelle

1	2	3	4	5	…
3	7	11	…		

Lannin, J. K. (2005) Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities, *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231–258.
Schifter, D. (2018). Early Algebra as Analysis of Structure: A Focus on Operations. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year Olds* (pp. 309–327). Springer.

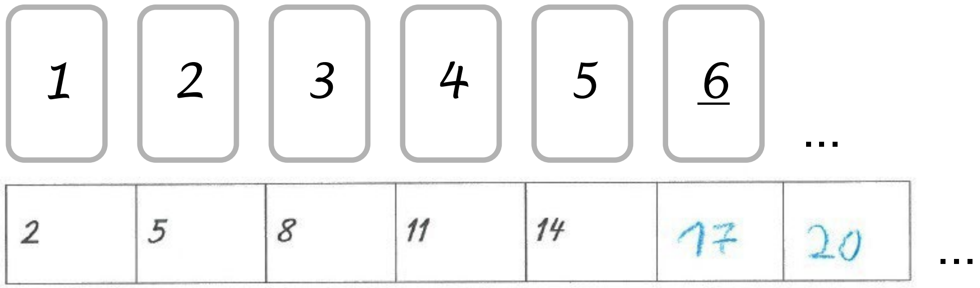


Co *fortführen, replizieren, nutzen, fortsetzen, Analogien erkennen, transferieren*

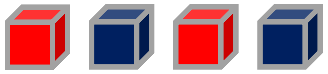


Funktionen

- Wie geht es weiter?
  - Finde das nächste.
  - Finde das 50.
  - Finde das 100.

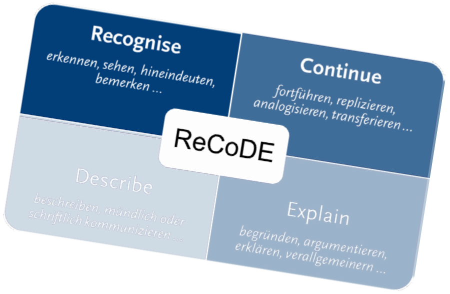


- Welche Muster passen zusammen? (Analogien / mathematisch strukturgleich)

  z.B. AB-Motiv zweigliedrige Wiederholungseinheit aus zwei Farben, Formen, Größen oder Ziffern: 2, 5, 2, 5, … ○□○□○□ …  …

vgl. z.B. Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht.* Waxmann.

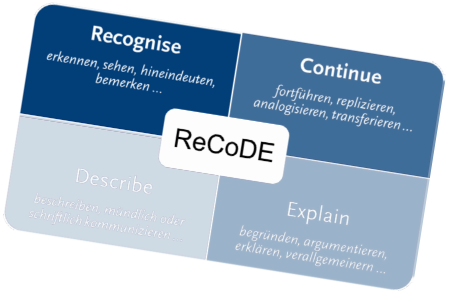
D beschreiben, mündlich oder schriftlich kommunizieren



Erkennen und das Beschreiben
mathematischer Muster (...)
als zwei sich wechselseitig bedingende Prozesse (...)
Beschreiben nicht als der Deutung nachrangiger Prozess (Akinwunmi, 2012, S. 280)

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

D beschreiben, mündlich oder schriftlich kommunizieren

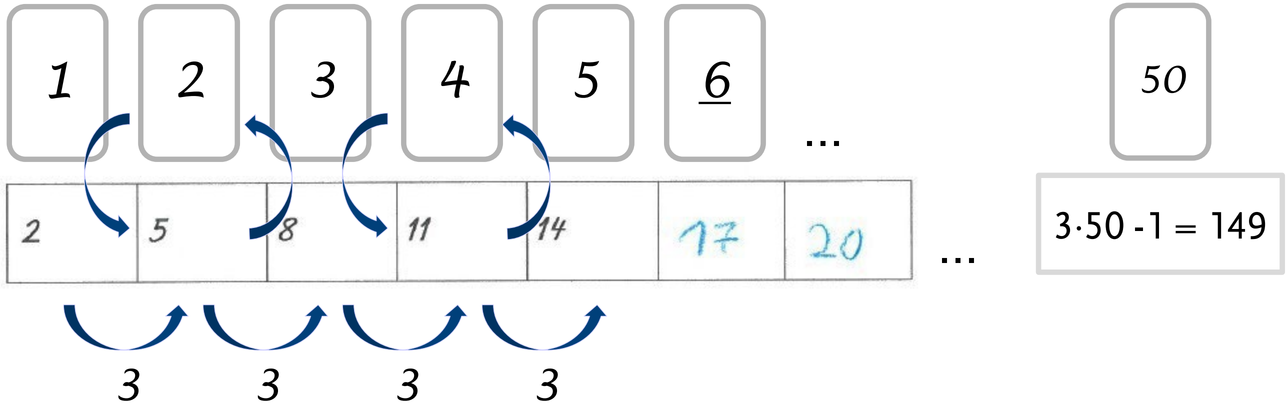


- Was fällt dir auf?
- Beschreiben der Regelmäßigkeiten / der erkannten Muster.
- Beschreiben des eigenen Denkweges.

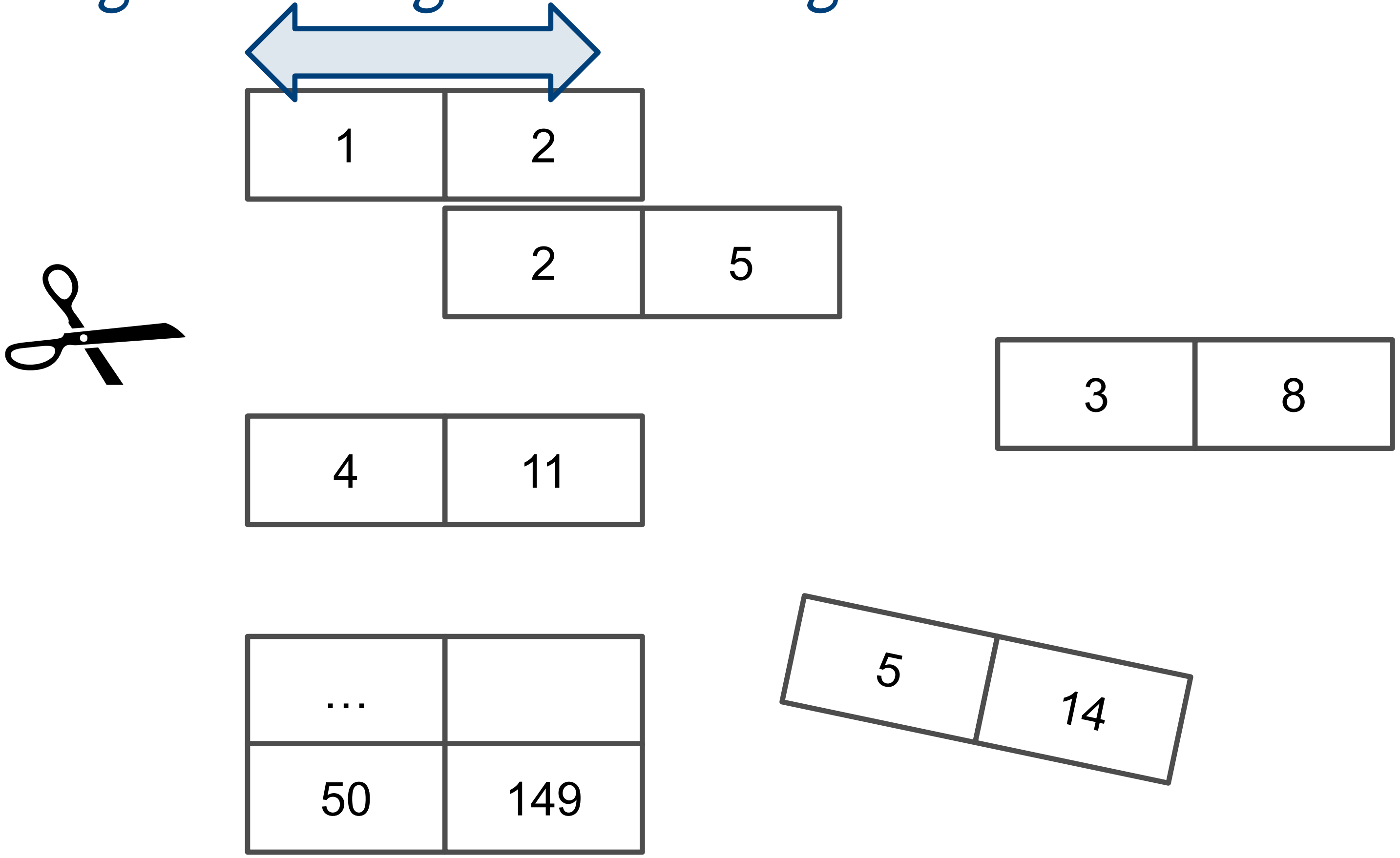
2	5	8	11	14	17	20

Wo ich es gesehen habe habe ich schnell eine drei im kopf gesehen. Und habe dan dauernd + drei gerechnet.

- Finde das 50.
- Finde das 100.



Funktionales Denken
Beschreibungen der allgemeinen Regel fördern

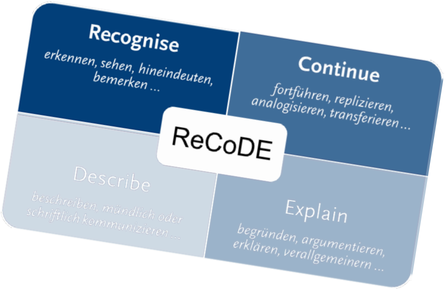


Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Steinweg, A. S. (2001). Wie heißt die Partnerzahl? Ein Übungsformat für alle Schuljahre. In W. Schipper & C. Selter (Hrsg.), *Offener Mathematikunterricht: Arithmetik II* (S. 72-74). Friedrich Verlag.

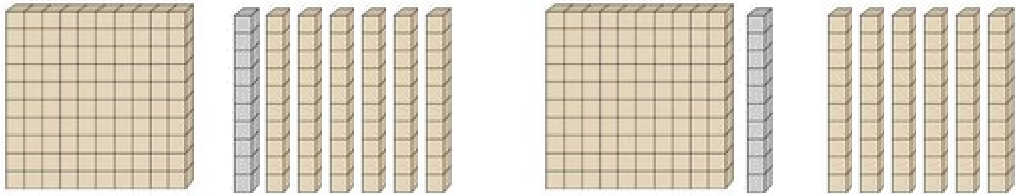
Beschreibung oder Begründung?!

Gleichungen



Operationen

$100 + 70 = \_\_\_\_ + 60$



da steht ja eine 60. Und bei den anderen ist eine 70 da. Und jetzt kann ich nicht einfach die 60 weg streichen. Und* 70 sind 10 merere als ~~a~~ 60 und dann muss ich die zehn in die 100 tuen.

Steinweg, A.S. (2013) *Algebra in der Grundschule*. Springer Spektrum.

Äquivalenz als Beziehung (Relation) zwischen …

Gleichungen

Äquivalenz ist mathematisch betrachtet eine Relation,
d.h. eine *Beziehung zwischen mindestens zwei Objekten* oder zwei Ausdrücken.

Im Arithmetikunterricht treten die Eigenschaften der Äquivalenzbeziehung üblicher Weise als Beziehung zwischen Termen auf.

hidden sameness
(Kieran & Martínez-Hernández, 2022)

not the same, but equal

$4 + 1$ und $3 + 2$

vermittelt über implizite Transitivität

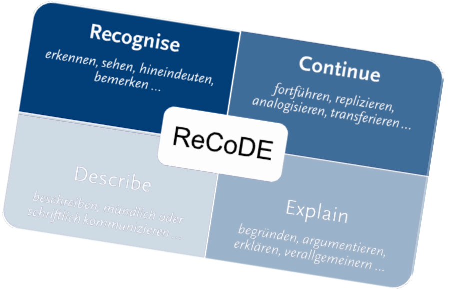
Da $4 + 1 = 5$ und $5 = 3 + 2$, gilt ebenso $4 + 1 = 3 + 2$.

(Akinwunmi & Steinweg, 2024)

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Kieran, C., & Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical equalities by 10- to 12-year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM Mathematics Education, 54*(6), 1215–1227. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01355-5

E *begründen, argumentieren, erklären, verallgemeinern*



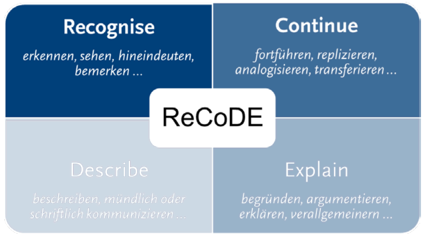
- Warum ist das so?
- Woher hast du das gewusst?
- Ist das immer so?

> Verallgemeinerungen [sind] kein hinreichender Indikator für das strukturelle Verständnis […] der Lernenden.
>
> (Akinwunmi & Lüken, 2021, S. 17)

Akinwunmi, K. & Lüken, M. (2021). Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?! In A. Steinweg (Hrsg.). *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 10: Blick auf Schulcurricula Mathematik: Empirische Fundierung?* (S. 9–24). Bamberg: University of Bamberg Press (ubp).

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Argumente finden …

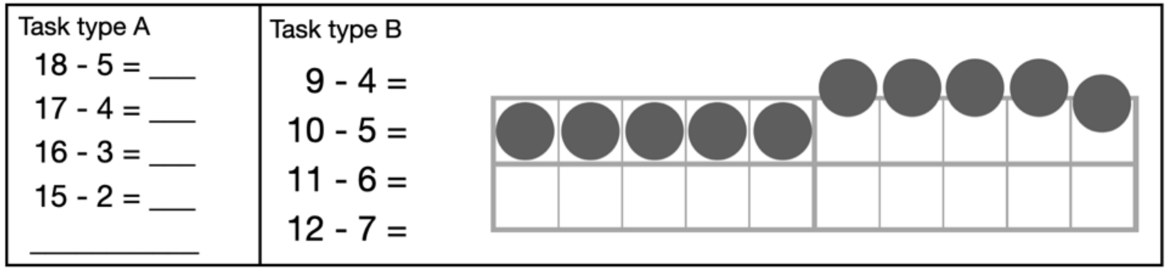


- Verallgemeinerungen mit dem *Fokus auf Muster*
  d.h. auf sichtbare Oberflächenmerkmale
- Verallgemeinerungen mit dem *Fokus auf Strukturen*
  d.h. auf mathematische Eigenschaften und Beziehungen

(Akinwunmi & Steinweg, 2022 / 2024)

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 465–472). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.



Operationen
Gleichungen

Hier *(fährt den Minuenden entlang)*
werden die Zahlen kleiner und
hier *(fährt den Subtrahenden entlang)*
werden sie aber auch kleiner. [...]
Bei Plus müsste das hier *(fährt den Subtrahenden entlang)* größer werden,
aber bei Minus wird es auch
kleiner, weil es sonst nicht
funktionieren würde.

Muster in Folgen
Regelwissen (Faktenwissen)

[...]

Jetzt nehmen wir hier einen mehr
(nimmt ein Plättchen aus der Materialbox und füllt die obere Reihe zu 10 Plättchen auf),
weil jetzt ist 10 *(zeigt auf den Aufgabenzettel)*,
aber dürfen dafür einen mehr
wegnehmen
(nimmt 5 Plättchen weg).

Struktureigenschaft der Reversibilität
von Addition und Subtraktion

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 465–472). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Paradoxon:

- *symbolische* Darstellungen von Aufgaben verleiten die Kinder an der Muster-Oberfläche zu bleiben und konkrete (numerische) Beispiele zu nutzen,
- während *ikonische oder materialbasierte* Darstellungen die Möglichkeit bieten, eher strukturelle Argumente zu finden.

Darstellungen und Repräsentationen spielen eine entscheidende Rolle für Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf mathematische Strukturen.

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 465–472). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Leitidee Zahl –Variable – Operation

mit Zahlentermen arbeiten

- bei der Berechnung von *Zahltermen* Rechengesetze für Rechenvorteile nutzen (Jg. 5/6, S. 19)

Zahlterme berechnen

- Zahlterme mit rationalen Zahlen – auch in unterschiedlicher Darstellung – vereinfachen und deren Wert berechnen (Jg. 7/8, S. 26)

mit Termen umgehen, die auch Variablen enthalten

- Zahlenfolgen fortsetzen und unter Verwendung von *Variablen* beschreiben (auch die Folge der ungeraden und geraden Zahlen)
- den Wert von *Termen*, die *Variablen* enthalten, durch Einsetzen berechnen
- die *Assoziativgesetze*, die *Kommutativgesetze* sowie das *Distributivgesetz* angeben und an Beispielen erläutern (Jg. 7/8, S. 26)

Baden-Württemberg Ministerium für Kultur, Jugend und Sport (2024). *Bildungsplan des Gymnasiums: Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M.V2

$$100 - 70 = 70 - \_\_$$

Gleichungen

Operationen

in %

	Pre-Test (N=135)	Post-Test (N=133)
40	24	49
100	27	33
30	21	10
andere Zahl	3	6.5
keine Antwort	25	1.5

Steinweg, A.S. (2013) *Algebra in der Grundschule*. Springer Spektrum.

Aufgaben-Duette (Twin Tasks) als Zugang zu Eigenschaften von Operationen und Gleichungen

$$100 + 70 = 70 + \_\_$$
$$100 - 70 = 70 - \_\_$$

Operationen

Worauf muss man achten? Man muss aufpassen und gut gucken bei Nr. 4 und 5. Denn die Tauschaufgaben sind ganz schön anders als bei + und ·. Denn es gibt keine Tauschaufgaben bei - und :.

$$100 - 70 = 70 - 40$$

140

140

Gleichungen

> A focus on the behavior of addition, subtraction, multiplication, and division helps students come to see an operation not exclusively as a process or algorithm, but also as a mathematical object in its own right [...]. As the operations become salient, seen as objects with a set of characteristics unique to each, students are positioned to recognize and apply their distinct structures.
>
> (Schifter, 2018, S. 310)

Schifter, D. (2018). Early Algebra as Analysis of Structure: A Focus on Operations. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year Olds* (pp. 309–327). Springer.

Steinweg, A. S. (2005). Arithmetik ist mehr als Ausrechnen. *Grundschulunterricht,* (7/8), 15–17.

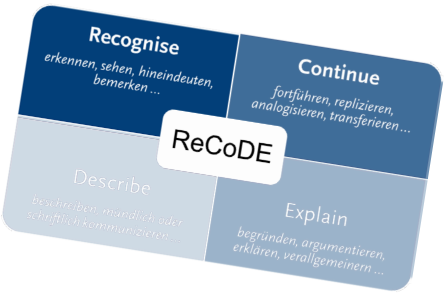
Terme und Gleichungen erforschen

$$100 - 70 = 70 - 40$$

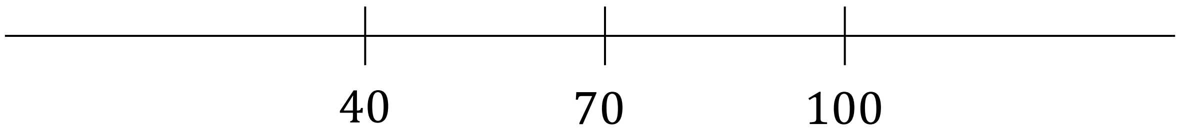
140

140

Gleichungen



- Differenz als Abstand auf der Zahlengeraden



- äquidistante Zahlenfolge

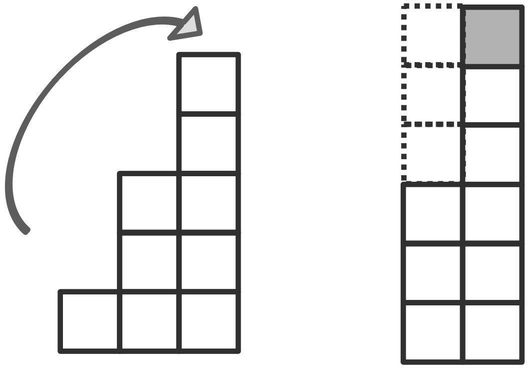
Weitere Beispiele finden

2, 7, 12 $\quad 2 + 12 = 2 \cdot 7$

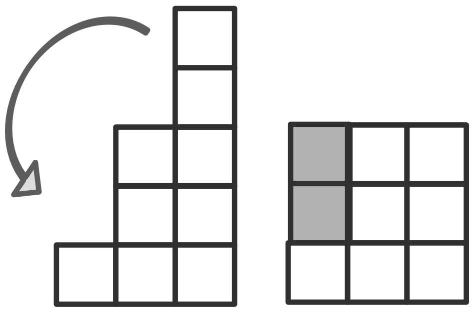
1, 3, 5 $\quad 1 + 5 = 2 \cdot 3$

...

Summenbildungen anschaulich



neue Entdeckung...

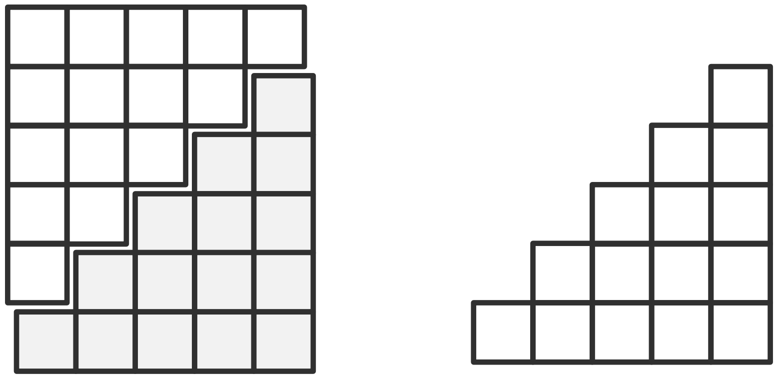


$$1 + 3 + 5 = 3 \cdot 3$$

Besondere Zahlfiguren erforschen – Entdeckungen verallgemeinern

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ \dots\ + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Zahlen



Rechnet mit Dreieckszahlen und vergleicht.

a) $1 + 1$
$1 \cdot 2$

b) $3 + 3$
$2 \cdot 3$

c) $6 + 6$
$3 \cdot 4$

d) $10 + 10$
$\_ \cdot \_$

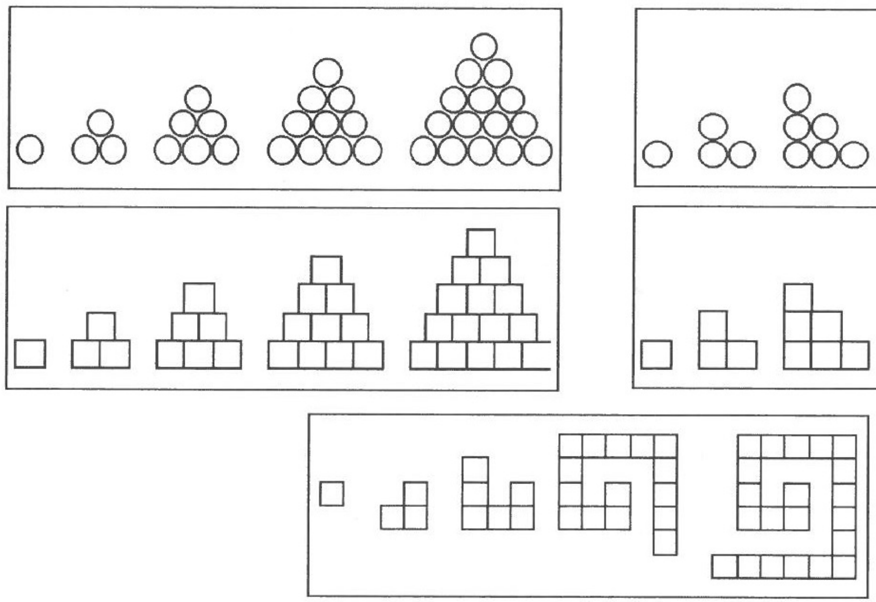
e) $15 + 15$
$\_ \cdot \_$

f) $\_ + \_$
$6 \cdot 7$

Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D. & Heß, B. (2017). *Das Zahlenbuch 2*. Klett. S. 131

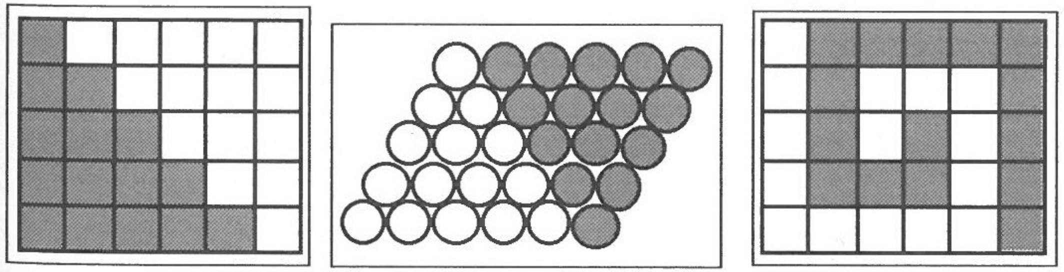
Die Allgemeingültigkeit des Beweises ergibt sich aus der Handlung (Operation), die allgemein bei *allen* Objekten dieser Klasse (mit den gleichen strukturellen Eigenschaften) anwendbar ist und zur gleichen Wirkung führt.

Eine Gleichung
– verschiedene Darstellungen



(Mason et al., 2005, S. 119)

Each of the following diagrams suggests a way to express the fifth triangular number, and hence the general triangular number (the sum of the first *n* natural or counting numbers) in terms of *n*. Interpret each diagram in general, perhaps by drawing a different version (that is, a version corresponding to a different *n*) and Watch What You Do when drawing, in order to contact the underlying structure.



Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. Sage Publications.

Gleichungen vergleichen
Äquivalenz auf der Spur

Gleichungen

- Aufgaben-Duette

  Gleichungs-Duette

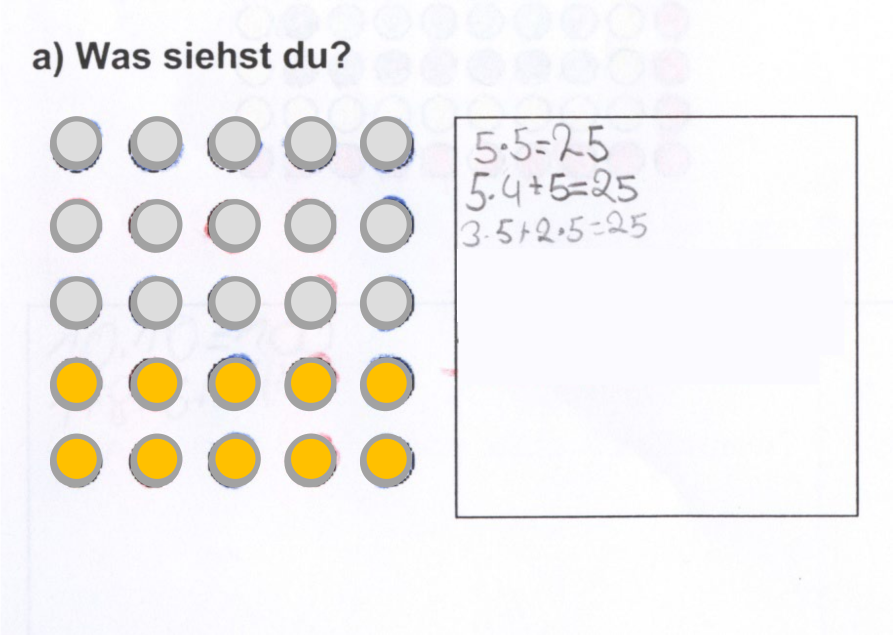
$$3 \cdot x + 5 = 35$$
$$3 \cdot y + 8 = 35$$

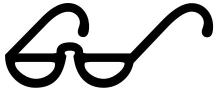
$$3 \cdot x + 5 = 35$$
$$6 \cdot y + 5 = 35$$

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.
in Anlehnung an Küchemann, D. (2019). *Algebradabra! Developing a better feel for school algebra*. Association of Teachers of Mathematics (ATM).

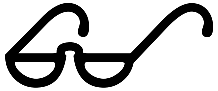
Eine Darstellung

– verschiedene Gleichungen





Gleichungen

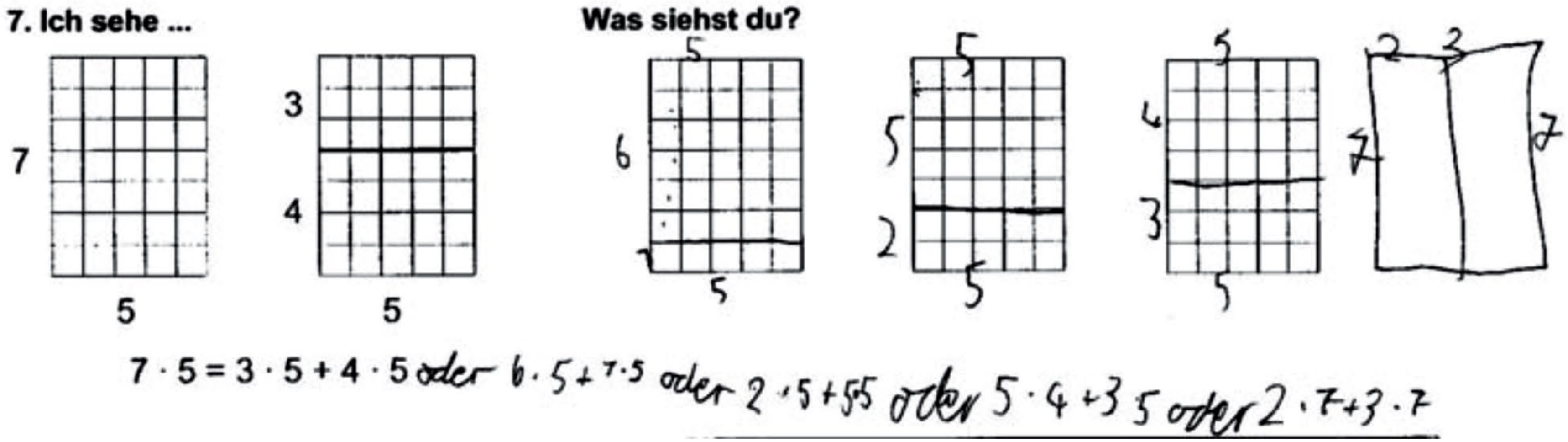


Operationen

Steinweg, A. S. (2006). Kinder deuten geometrische Strukturen und Gleichungen - Ich sehe was, was du auch sehen kannst. In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hrsg.) *Wie rechnen Matheprofis? (S.* 71 - 86) Oldenbourg.

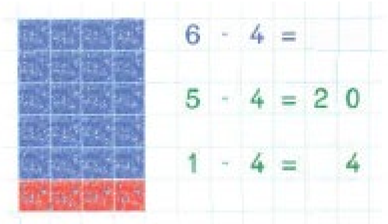
Anschauliche Darstellungen als Zugang zu Eigenschaften von Operationen

Operationen



Steinweg, A. S. (2017). Key ideas as guiding principles to support algebraic thinking in German primary schools. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1 – 5, 2017) (pp. 512-519). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

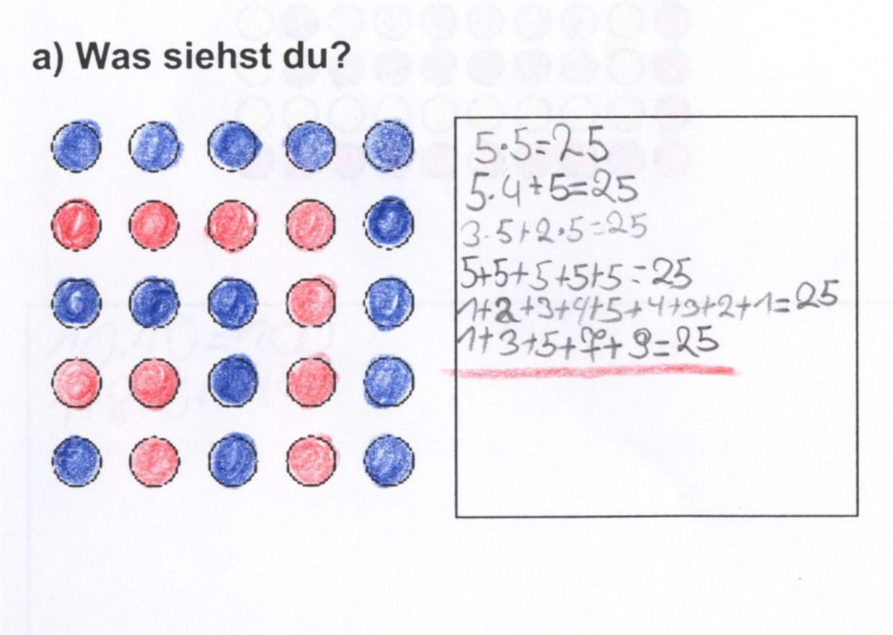
die Aufgaben des kleinen Einmaleins aus den Kernaufgaben [·1, ·2, · 5, · 10 und QZ] ableiten und deren Beziehung zueinander nutzen
(BW GS Mathe 2024, S. 16)



Baden-Württemberg Ministerium für Kultur, Jugend und Sport (2024). *Bildungsplan der Grundschule: Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GS/M.V2

Eine Darstellung

– verschiedene Gleichungen



Gleichungen

Operationen

Zahlen

Steinweg, A. S. (2006). Kinder deuten geometrische Strukturen und Gleichungen - Ich sehe was, was du auch sehen kannst. In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hrsg.) *Wie rechnen Matheprofis? (S.* 71 - 86) Oldenbourg.

Argumentieren und Beweisen – Verallgemeinern mit Fokus Strukturen

Die experimentellen ‚Beweise' bestehen in der Verifikation *einer endlichen Zahl von Beispielen*, was natürlich keine Allgemeingültigkeit sichert.

Inhaltlich-anschauliche, operative Beweise stützen sich dagegen auf Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, daß [sic!] sie sich auf *eine ganze Klasse von Beispielen* anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen.

(Wittmann & Müller, 1988, S. 249)

Wittmann, E. & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (S. 237–258). Cornelsen.

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Leitidee Zahl –Variable – Operation

Gleichungen lösen

- *lineare Gleichungen* durch systematisches Probieren und *Äquivalenzumformungen* lösen
- die Lösung eines *linearen Gleichungssystems* mit zwei *Variablen* mithilfe eines Verfahrens bestimmen (Jg. 7/8, S. 27)

Baden-Württemberg Ministerium für Kultur, Jugend und Sport (2024). *Bildungsplan des Gymnasiums: Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M.V2

Äquivalenzumformungen als Einpacken und Auspacken

Gleichungen

Gleichungen aufstellen durch Einpacken

(4) Die Zahl 4 wird verpackt.

$x = 4$

1. Verpackung ↓ $\cdot 3$ — $3 \cdot x = 3 \cdot 4$

$3x = 12$

2. Verpackung ↓ $+2$ — $3x + 2 = 12 + 2$

$3x + 2 = 14$

A Beschreibe die erste Verpackung.

B Beschreibe die zweite Verpackung.

C Packe die Zahl 4 wieder aus, indem du den Weg von $3x + 2 = 14$ aus rückwärts gehst.

Affolter et al. (2003). *mathbu.ch 8 – Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I.* Klett & Balmer.

4

Umformung I
Zu beiden Termen wird dieselbe Zahl addiert.

Umformung II
Von beiden Termen wird dieselbe Zahl subtrahiert.

Umformung III
Zu beiden Termen wird derselbe Term addiert.

Umformung IV
Von beiden Termen wird derselbe Term subtrahiert.

Umformung V
Beide Terme werden mit derselben Zahl multipliziert.

Umformung VI
Beide Terme werden durch dieselbe Zahl dividiert.

Umformung VII
Der Term auf einer Seite wird durch Umformung in seiner Darstellung verändert oder vereinfacht.

Ohne Klammern schreiben:
$3 \cdot (x - 2) = 3x - 6$

Mit Klammern schreiben:
$9x + 12 = 3 \cdot (3x + 4)$

Gleichungen aufstellen durch Einpacken

(4) Die Zahl 4 wird verpackt.

$x = 4$

1. Verpackung ↓ $\cdot 3$ — $3 \cdot x = 3 \cdot 4$

$3x = 12$

2. Verpackung ↓ $+2$ — $3x + 2 = 12 + 2$

$3x + 2 = 14$

A Beschreibe die erste Verpackung.

B Beschreibe die zweite Verpackung.

C Packe die Zahl 4 wieder aus, indem du den Weg von $3x + 2 = 14$ aus rückwärts gehst.

(5) Welche Umformungen I – VII brauchtest du zum Ein- und zum Auspacken in Aufgabe 4?

(6) Die Zahl 4 wird anders verpackt.

			Kontrolle: 4 einsetzen
		$x = 4$	
1. Verpackung ↓	$-x$	$x - x = 4 - x$	
		$0 = 4 - x$	$0 = 0$
2. Verpackung ↓	$+(x+8)$		
		$x + 8 = 4 - x + (x + 8)$	$12 = 12$
3. Verpackung ↓	**Term umformen**		
		$x + 8 = 12$	$12 = 12$

A Welche der Umformungen I – VII brauchst du zum Verpacken und zum Auspacken?

B Die Zahl 4 kannst du auch in einem Schritt auspacken. Welche Umformung brauchst du dabei?

(7) A Verpacke selber eine Zahl.

B Gib jemandem die letzte Zeile deiner Verpackung und lasse die Zahl auspacken.

(8) A Beschreibe diese drei Lösungswege. Wie gelangt man jeweils von einer Gleichung zur nächsten?

$9x + 12 = 3 \cdot (x - 2)$	$9x + 12 = 3 \cdot (x - 2)$	$9x + 12 = 3 \cdot (x - 2)$
$3 \cdot (3x + 4) = 3 \cdot (x - 2)$	$9x + 12 = 3x - 6$	$9x + 12 = 3x - 6$
$3x + 4 = x - 2$	$6x + 12 = -6$	$9x + 18 = 3x$
$2x + 4 = -2$	$6x = -18$	$18 = -6x$

B Führen alle Wege zur gleichen Lösung?

C Welcher Weg ist für dich der einfachste? Woran liegt das?

(9) Packe die Zahlen aus. Notiere bei jedem Schritt, was du machst. Welche Zahlen wurden verpackt?

A $5x - 12 = 3x + 8$

B $5x - 12 = 3 \cdot (x + 2)$

C $5x - 12 = -x$

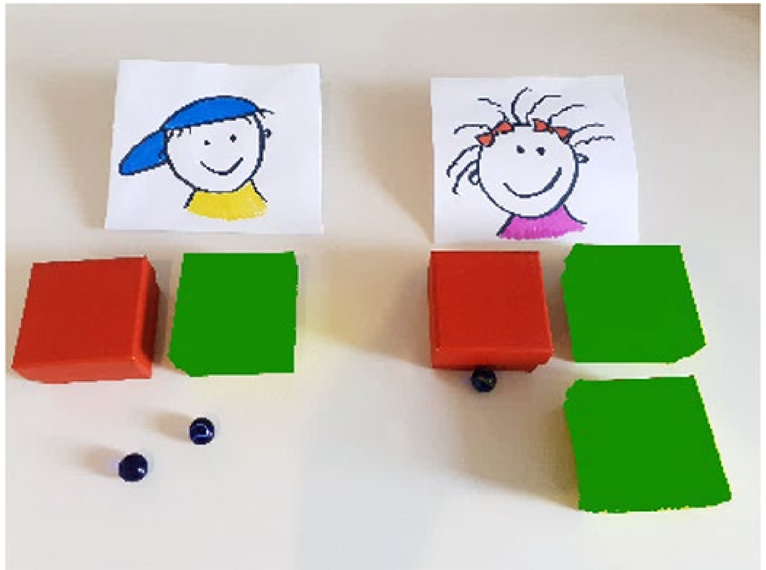
D $5x - 12 = 7x : 2$

E $9x + 12 = 3 \cdot (x - 2)$

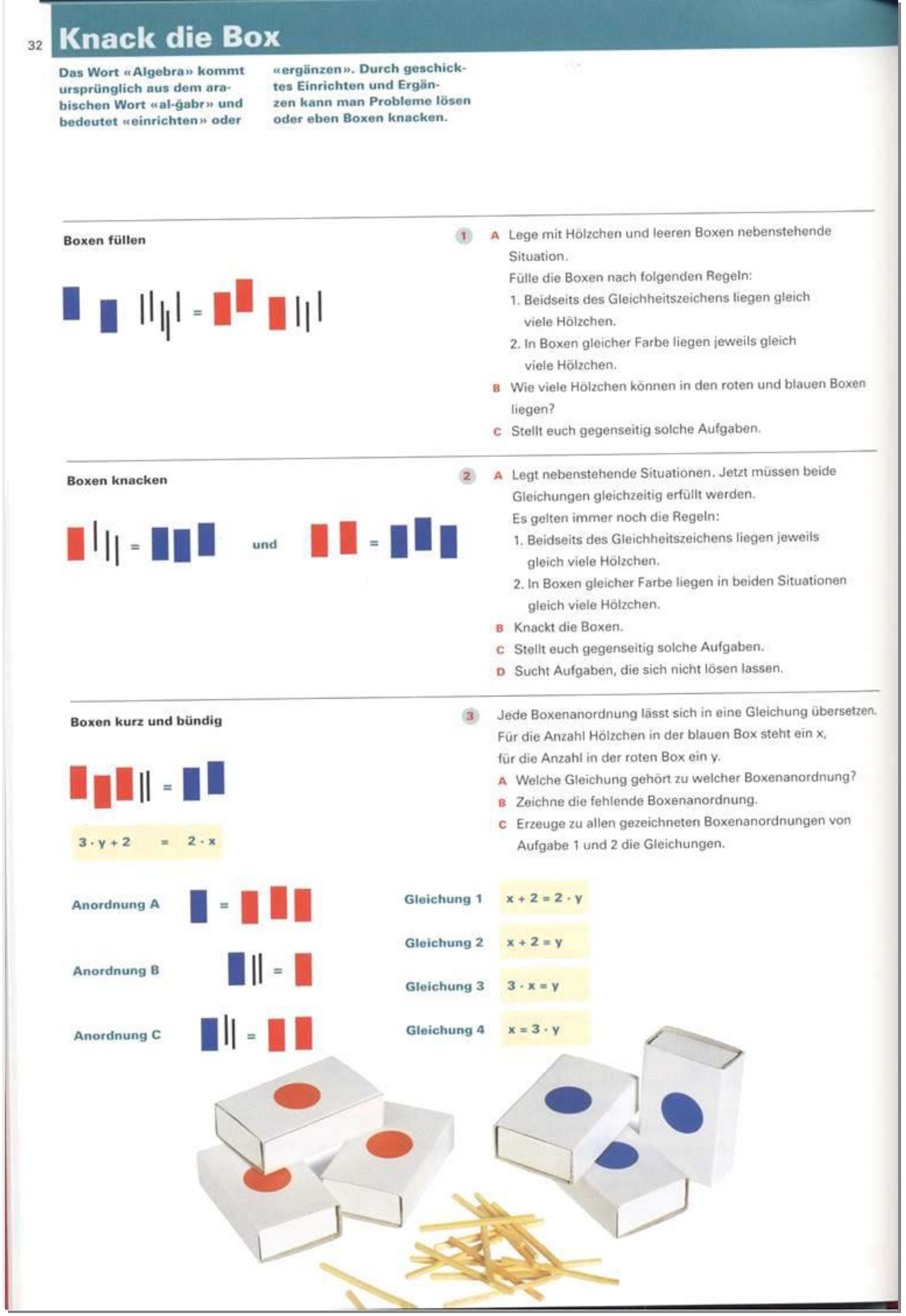
F $3x + 5 = \frac{1}{2} - 6x$

Gleichungen durch Umformen lösen.

Gleichungen mit zwei Variablen
Zugang über Boxen



Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: An interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM Mathematics Education, 54*(6), 1181–1197



32

Knack die Box

Das Wort «Algebra» kommt ursprünglich aus dem arabischen Wort «al-ğabr» und bedeutet «einrichten» oder «ergänzen». Durch geschicktes Einrichten und Ergänzen kann man Probleme lösen oder eben Boxen knacken.

Boxen füllen

1 A Lege mit Hölzchen und leeren Boxen nebenstehende Situation.
Fülle die Boxen nach folgenden Regeln:
1. Beidseits des Gleichheitszeichens liegen gleich viele Hölzchen.
2. In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Hölzchen.

B Wie viele Hölzchen können in den roten und blauen Boxen liegen?

C Stellt euch gegenseitig solche Aufgaben.

Boxen knacken

und

2 A Legt nebenstehende Situationen. Jetzt müssen beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt werden.
Es gelten immer noch die Regeln:
1. Beidseits des Gleichheitszeichens liegen jeweils gleich viele Hölzchen.
2. In Boxen gleicher Farbe liegen in beiden Situationen gleich viele Hölzchen.

B Knackt die Boxen.

C Stellt euch gegenseitig solche Aufgaben.

D Sucht Aufgaben, die sich nicht lösen lassen.

Boxen kurz und bündig

$3 \cdot y + 2 = 2 \cdot x$

3 Jede Boxenanordnung lässt sich in eine Gleichung übersetzen. Für die Anzahl Hölzchen in der blauen Box steht ein x, für die Anzahl in der roten Box ein y.

A Welche Gleichung gehört zu welcher Boxenanordnung?

B Zeichne die fehlende Boxenanordnung.

C Erzeuge zu allen gezeichneten Boxenanordnungen von Aufgabe 1 und 2 die Gleichungen.

Anordnung A

Anordnung B

Anordnung C

Gleichung 1 $x + 2 = 2 \cdot y$

Gleichung 2 $x + 2 = y$

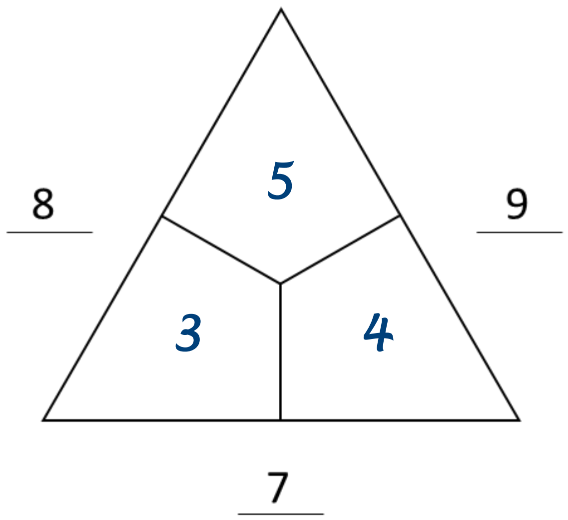
Gleichung 3 $3 \cdot x = y$

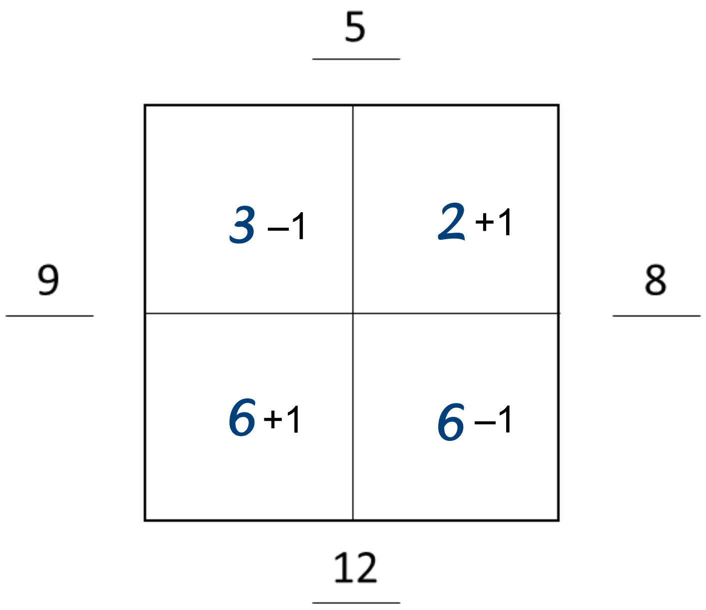
Gleichung 4 $x = 3 \cdot y$

Affolter et al. (2003), *mathbu.ch 7 – Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I.* Klett & Balmer.

vgl. auch
Wieland, G. (2006). Terme bauen – Impulse für mehr Anschaulichkeit in der elementaren Algebra. *mathematik lehren,* (136), 22 und 39–43.

Gleichungssysteme erforschen





Lösungsverhalten der Rechendreiecke und Rechenvierecke (eine bzw. keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen) entdecken als strukturell analog zu Lösungen linearer Gleichungen.

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Zusammenhänge beschreiben

- einfache Zusammenhänge zwischen Zahlen oder Größen erkennen und beschreiben
- Muster (zum Beispiel Zahlenfolgen) erkennen, verbal beschreiben und diese fortsetzen (Jg. 5/6, S. 24)

funktionale Zusammenhänge darstellen und nutzen

- Zusammenhänge durch *Tabellen, Gleichungen, Graphen* oder Text darstellen und situationsgerecht zwischen den Darstellungen wechseln
- *Funktionen* als eindeutige Zuordnungen, zum Beispiel von x-Werten zu y-Werten, von nicht eindeutigen Zuordnungen unterscheiden (Jg. 7/8, S. 30)

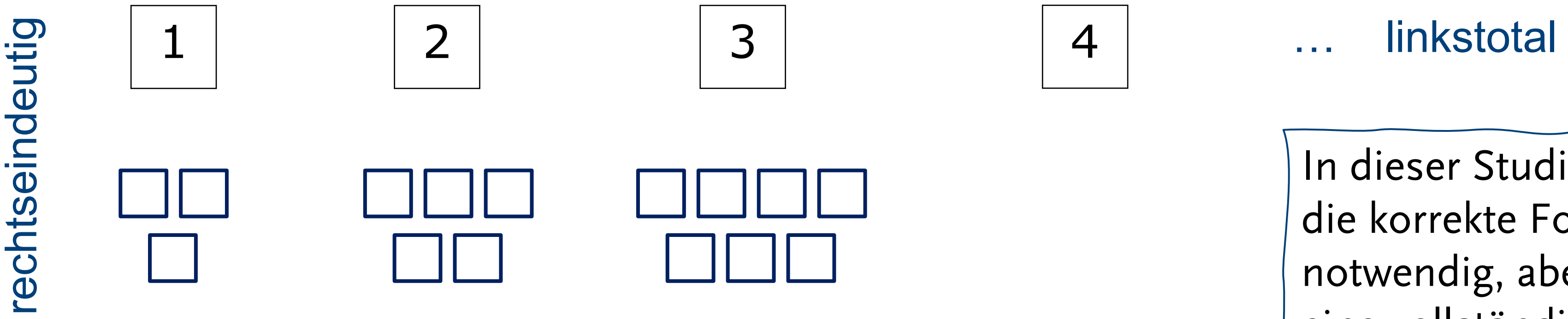
mit quadratischen Funktionen umgehen

- quadratische Zusammenhänge durch *Tabellen* und *Gleichungen* beschreiben und graphisch darstellen (Jg. 7/8, S. 31)

Baden-Württemberg Ministerium für Kultur, Jugend und Sport (2024). *Bildungsplan des Gymnasiums: Mathematik.* https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M.V2

Figuren-Folgen als Zugang zu funktionalem Denken

Funktionen



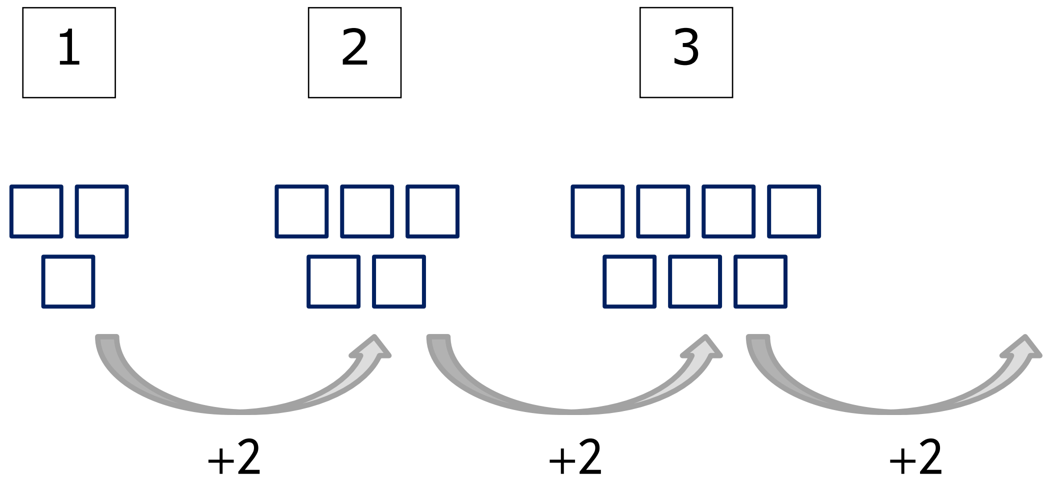
I. Fortsetzen.
II. 100. Figur beschreiben.
III. Passung des Terms $2 \cdot n + 1$ beurteilen.

In dieser Studie [N=96 aus Jg. 3/4] war die korrekte Fortsetzung [I] notwendig, aber nicht hinreichend für eine vollständige Termdeutung.

Das verallgemeinernde Beschreiben [II] zeigte hingegen überraschend wenig Einfluss: Selbst bei keiner eigenen oder einer individuellen Verallgemeinerung waren zumindest (Teil-)Deutungen des Terms möglich.

Steinweg, A. S. (2019). Short note on algebraic notations: First encounter with letter variables in primary school. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 11), (pp. 682-689). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

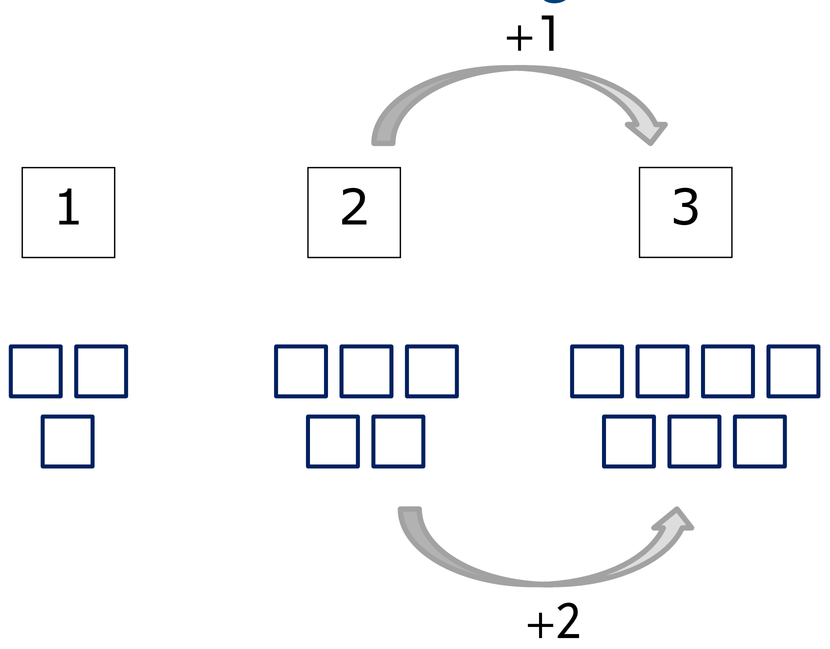
Funktionale Denkweisen im Kontext Figuren-Folgen



rekursive Denkweise

- Benachbarte Werte (abhängige Variablen), werden in ihren Differenzen betrachtet: Differenzenfolge (hier 2, 2, 2 ...)
- Die Ermittlung von nächsten Figuren (Nachbar-Werten) ist möglich.
- Ein Zusammenhang zur jeweiligen Position in der Folge (unabhängige Variable) zum Wert der Figur (abhängige Variable) wird nicht hergestellt.

Funktionale Denkweisen im Kontext Figuren-Folgen



kovariative Denkweise

- Benachbarte Paare werden in beiden Änderungen, d. h. Variation der unabhängigen Position in der Folge und gleichzeitiger, abhängiger Kovariation der Werte betrachtet.
- Die Änderungsrate liegt im Fokus der Beschreibung.
- *Lokale* Änderung und Zuordnung benachbarter Paare.

Muster erforschen - Strukturen verstehen
Eigenschaften von Funktionen

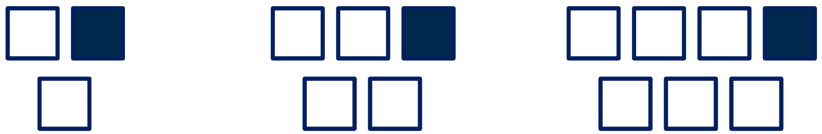
> make a choice between
> what counts as the same
> and the different
> (Radford, 2008, S. 84)

Radford, L. (2008).
Iconicity and contraction. *ZDM*, *40*(1), 83–96.

- Rechtseindeutige, linkstotale Relationen
- Änderungsrate und Konstante

$n \rightarrow m \cdot n + b$
Steigung und Ordinatenabschnitt

1 2 3 4



$n \rightarrow 2n + 1$

\# Was bleibt gleich? Färbe ein.

\# Was ändert sich?

Besteht ein Zusammenhang
zwischen den ungefärbten Elementen und der Zahl auf der Ziffernkarte?

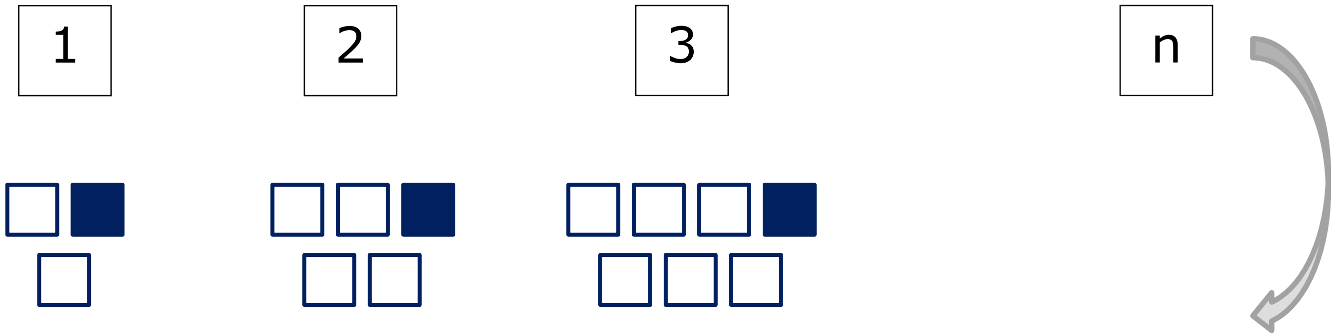
Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Steinweg, A. S., Twohill, A., & McAuliffe, S. (2023). *ZADIE Functional Thinking through Patterning: Teacher Manual.* Dublin: CASTeL

Cape Peninsula University of Technology

DCU

Funktionale Denkweisen im Kontext Figuren-Folgen



$n \rightarrow 2 \cdot n + 1$

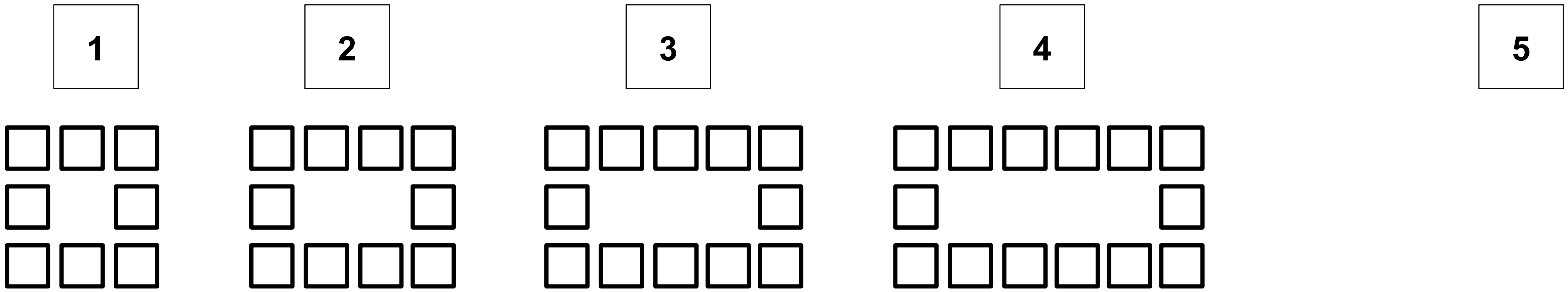
Zweimal die Zahl (auf der Karte) und einer mehr.

explizite Denkweise

- Die *allgemeine* Beziehung aller Paare zwischen unabhängiger Position und abhängigen Werte wird *in Änderungsrate und Konstante* beschrieben.
- Die direkte Ermittlung von Werten (rechtseindeutig) an beliebigen Stellen (linkstotal) ist möglich.

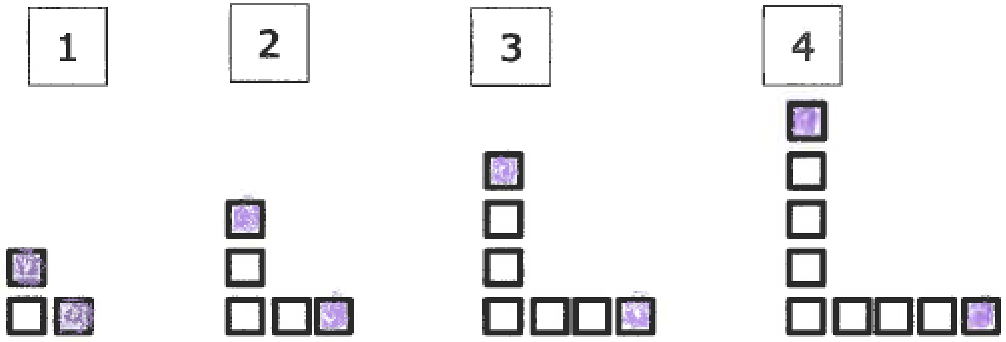
Strukturen auf der Spur …

Was bleibt gleich? Färben Sie diese Quadrate.



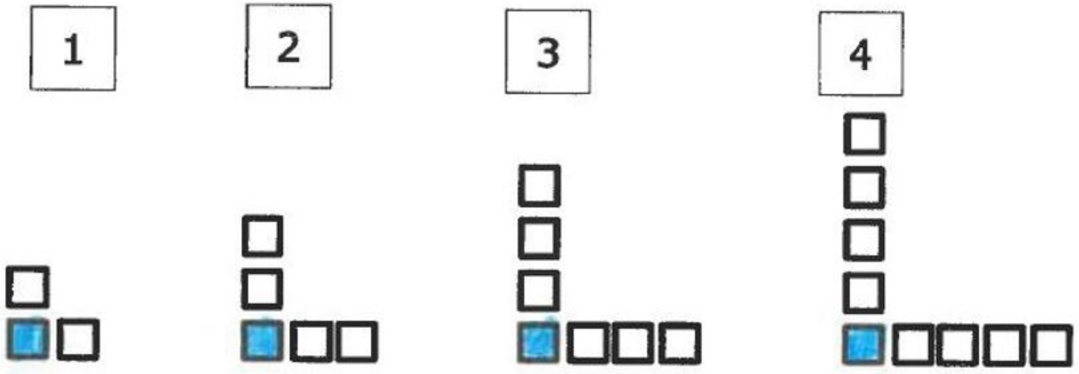
Sehen Sie einen Zusammenhang
zwischen der Positions-Nummer und den *ungefärbten* Quadraten?

Beschreibungen verdeutlichen Denkweisen



Erkläre.
Es wird immer um 2 größer.

rekursiv

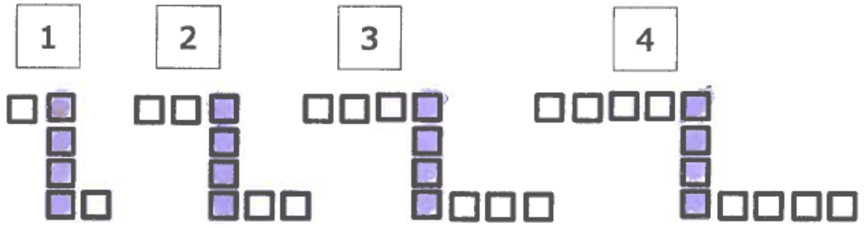


Erkläre.
Über der Ecke ist die anzahl der Nummer

explizit

Steinweg, A. S. (2023). Über der Ecke ist die Anzahl der Nummer: Muster in Zahlenfolgen als Türöffner zur Mathematik. *Grundschule Mathematik*, (76), 8–11.

(Explizite) Regel aufstellen – auf dem Weg zum Funktionsterm



$n \rightarrow 2 \cdot n + 4$

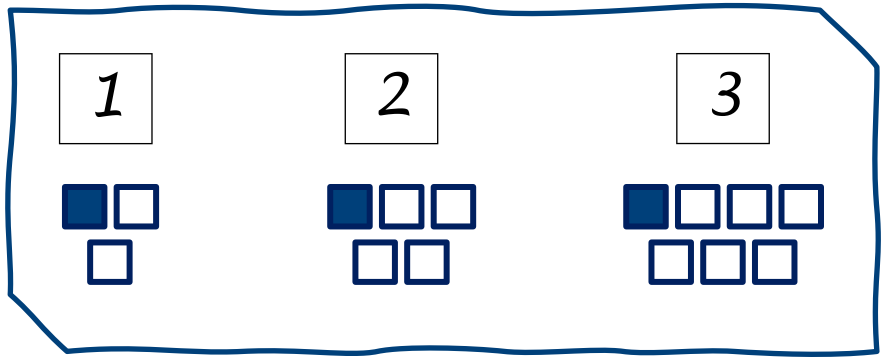
Oben Rechts und unten Links sind wie z.B. bei 3 drei oben und drei unten und und das selbe bei 1, 2 und 4

Die Senkrechte sind immer 4 Kästchen und die Waagerechten ist das Doppelte der Zahlenkarte.

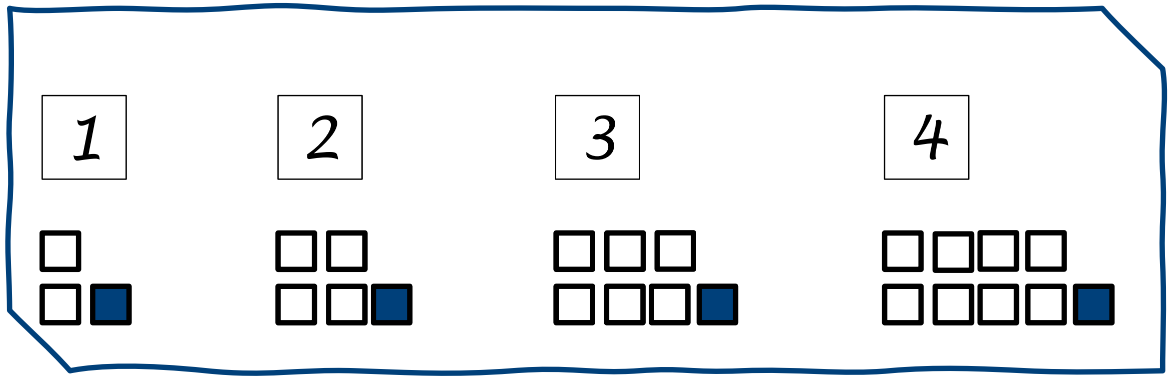
Die Ziffernkarte verdoppelt sich! Und das angemalte ist immer gleich.

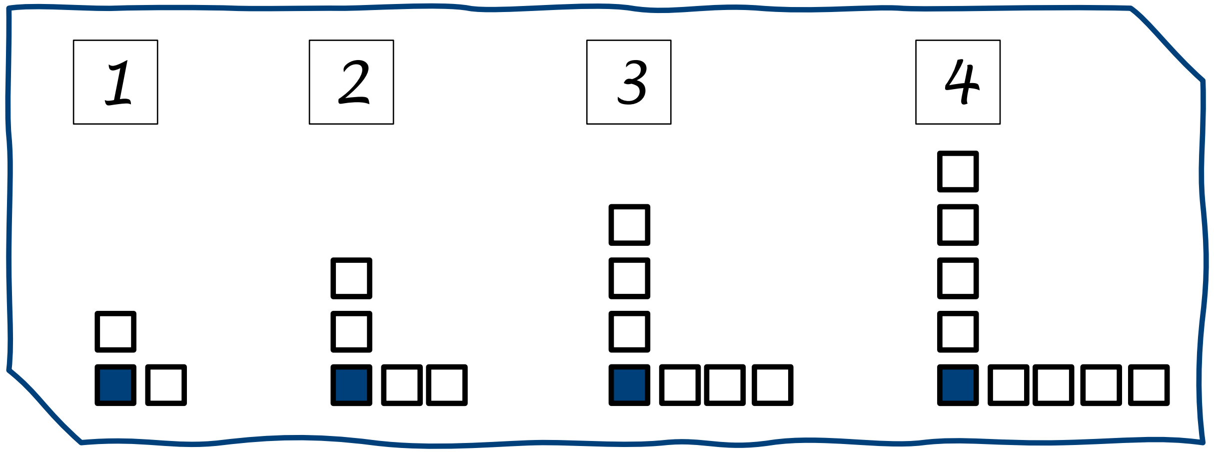
vgl. auch Steinweg, A. S. (2023). Über der Ecke ist die Anzahl der Nummer: Muster in Zahlenfolgen als Türöffner zur Mathematik. *Grundschule Mathematik,* (76), 8–11.

Darstellungen variieren – Fokus verändern



$n \to 2n+1$





vgl. auch Steinweg, A. S. (2023). Über der Ecke ist die Anzahl der Nummer: Muster in Zahlenfolgen als Türöffner zur Mathematik. *Grundschule Mathematik,* (76), 8–11.

Zum Schluss …

Mehrwert Muster & Struktur

- Strukturen erkennen stärkt Selbstvertrauen in die eigene mathematische Kompetenz (Sfard 1991, S. 29).
  „Those who are not prepared to actively struggle for meaning (for reification) would soon resign themselves to never understanding mathematics” (Sfard, 1991, S. 33)
- „Algebraisches Denken [ist] eine wesentliche Grundlage für die Entwicklung von flexiblen Rechenfähigkeiten“ (Schwarzkopf, 2017, S. 22).
- Der Blick auf allgemeine Beziehungen zwischen den beteiligten Zahlen und auf die Struktur, trägt dazu bei, Rechenmethoden und -strategien besser zu verstehen
  oder sogar kreativ neue, elegante Rechenwege zu erfinden (Arcavi, Drijvers & Stacey 2017, S. 4)

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities*. Routledge.

Schwarzkopf, R. (2017). Erst einmal Rechnen lernen? Von der Notwendigkeit algebraischen Denkens im Arithmetikunterricht. *Die Grundschulzeitschrift*, (306), 18–22.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36.

… nicht von allein.

- Algebraische Grundideen für den Arithmetikunterricht bieten fruchtbare Ansätze bereits ab der Primarstufe.
- adäquate Übergangsprozesse entstehen jedoch nicht ohne bewusste Thematisierung und „nicht kraft natürlicher Reifung“ (Winter 1982, S. 199).
- Neben vielen Beispielen von Beziehungen und Eigenschaften benötigen die Kinder auch die explizite Thematisierung dieser Strukturen in alltäglicher Sprache (vgl. Warren 2003, S. 133).

Warren, E. (2003). The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122–137.

Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *mathematica didactica, 5*(4), 185–211.

Mathematisches Argumentieren (PISA, 2022)

- In der heutigen Welt, wird die Fähigkeit, logische Schlussfolgerungen zu ziehen und Argumente zuverlässig und überzeugend aufzuzeigen, immer wichtiger.
  Die Mathematik ist eine Wissenschaft mit klar definierten Objekten und Begriffen, die mithilfe von „mathematischem Argumentieren" auf unterschiedliche Weise analysiert und umgewandelt werden können. Damit können zuverlässige und allgemein gültige Ergebnisse erzielt werden.
- In Mathematik lernen die Schülerinnen und Schüler, dass sie mit folgerichtigem Argumentieren und Annahmen zu Ergebnissen kommen können, auf die sie sich in verschiedenen Alltagssituationen verlassen können.
  Es ist wichtig, dass diese Schlussfolgerungen objektiv nachvollziehbar sind und keine Bestätigung von externer Stelle benötigen.

https://pisa2022-maths.oecd.org/de/

34 WISSEN 5. Dezember 2024 DIE ZEIT Nº 52

Bildung · Kita

(K)ein Herz für Mathe

…atik ein Hassfach. Muss das so bleiben? Ein Gespräch mit der Didaktik-Professorin Susanne Prediger

wissen das leider viele Lehrkräfte nicht. Die erklären sich Schwierigkeiten der Jugendlichen mit fehlendem Mathetalent und unterrichten einfach weiter nach dem Motto: Ihr tut hier so, als lernt ihr etwas, und ich tue so, als würde ich euch etwas beibringen.

ZEIT: Die Lehrer machen den Selbstbetrug mit?

Prediger: Ja, weil sie ihren Unterricht darauf optimieren, dass alle Lernenden das richtige Ergebnis im Heft haben. Aber dann haben diese noch nicht zwangsläufig das richtige im Kopf, und das wäre viel wichtiger. Zugespitzt formuliert: Es ist erschreckend leicht, Mathematik schlecht zu unterrichten, auch wenn das niemand will.

Prediger: Die einen Schüler langweilen sich in der Mathestunde, weil sie nichts verstehen, die anderen, weil sie immer dieselben Aufgaben rechnen müssen. Das passiert übrigens häufig in den als modern geltenden Selbstlernphasen.

ZEIT: Warum?

Prediger: Kinder und Jugendliche individuell im eigenen Tempo arbeiten zu lassen, funktioniert relativ einfach mit Rechenaufgaben. Mathematische Konzepte lernt man dagegen am besten im anspruchsvollen Unterrichtsgespräch,

Die Formel zu dieser Herzkurve lautet: $x^2+y^2-1-|x|y=0$

DIE ZEIT
No. 52

Mathematik als Denk-Gelegenheit

Mathematik ist ein großartiges und einzigartiges Fach,
da Strukturen im Fach verlässlich gegeben sind
und sich in Mustern zeigen und entdecken lassen.

Im Unterricht:

- Arithmetisch einfache (diskrete), exemplarische Beispiele einsetzen, in denen die Lernenden Muster entdecken können, um die zugrunde liegenden Struktur (Eigenschaften, Relationen) zu verstehen und strukturelle Erkenntnisse zu verallgemeinern.
- Möglichst *immer* Erfahrung ermöglichen, dass es lohnt sich zum *Pattern Seeker* zu werden, und zu erwarten, dass hinter der Tür etwas zu finden ist!

Leseverlockungen

Danke für Ihre Aufmerksamkeit.